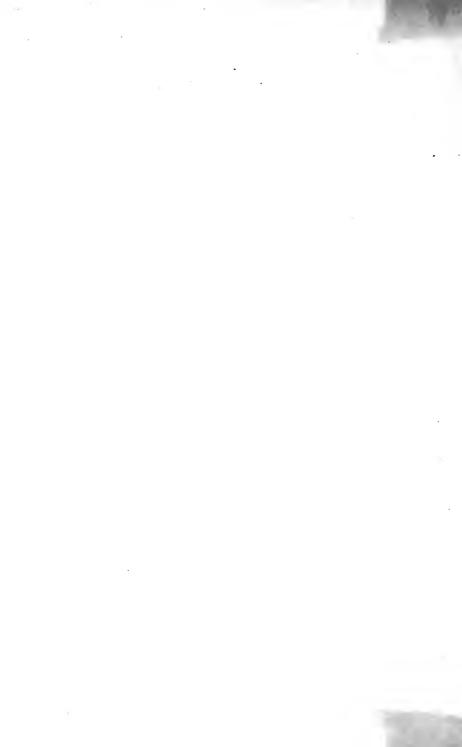
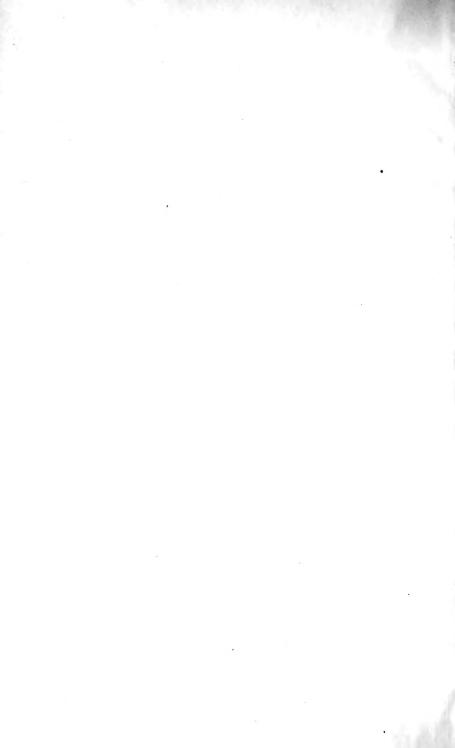
1 J6836 sér.4 t.4E

UNIV. OF TORONTO LIBRARY







Digitized by the Internet Archive in 2010 with funding from University of Ottawa



JOURNAL

DΕ

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction

de M. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOCIS

4. SÉRIE TOME QUATRIÉME Année 1895.



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1893

38220

6.A 1 16236 221:-

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT

Par Mmo Vve F. Prime.

I. - SUR LA DIVISION DES NOMBRES ENTIERS.

1. Dans les traités d'arithmétique, on évite de définir la division de deux nombres entiers; on définit leurs quotients approchés à moins d'une unité par défaut et par excès et on reprend la détermination du quotient exact après la théorie des fractions. Il en résulte des longueurs que l'on peut éviter. ainsi que nous voulons le montrer, en considérant la division comme une opération par laquelle, connaissant un produit (le dividende D) et le multiplicande (le diviseur d), on recherche le multiplicateur (le quotient q).

2. Théorème I. — Je dis que $q = \frac{D}{d}$.

Car, pour former D avec d, on peut partager d en d parties égales et prendre D fois l'une des parties. Il en résulte que $D = d \cdot \frac{D}{d}$.

3. Théorème II. — Le quotient q est l'une des parties du dividende D partagé en d parties égales.

En effet, pour partager D en d parties égales, partageons, en d parties égales, chacune des unités dont se compose D et prenons une partie à chaque unité; nous obtenons ainsi la fraction $\frac{D}{d}$.

4. Corollaire. — D = q.d.

5. Il résulte de là que la division permet encore de retrouver le multiplicande quand on connaît le multiplicateur et le produit. 6. Inéfinitions. — Si l'on a, à la fois.

$$D = d.Q + R \quad \text{et} \quad R < d,$$

Q s'appelle le quotient par défaut et R, le reste par défaut de la division de D par d.

En posant
$$Q' = Q + 1$$
 et $R' = d - R$, on a $D = d \cdot Q' - R'$ et $R' < d$;

Q' est alors le quotient par excès et R' le reste par excès.

7. Théorème III. — Si D = dQ + R, on $a q = Q + \frac{R}{d}$.

Le théorème revient à démontrer que

$$D = d \cdot \left(Q + \frac{R}{d} \right) \cdot$$

Or, pour former $Q + \frac{R}{d}$ avec l'unité. on a, d'abord, pris Q fois l'unité et on y a ajouté R fois la $d^{\text{ième}}$ partie de l'unité. Pour obtenir le produit indiqué, prenons donc Q fois d ce qui donne dQ et ajoutons-y R fois le $d^{\text{ième}}$ de d ou R; nous trouvons ainsi $d \cdot Q + R$ ou D.

- 8. **Théorème IV.** Si D = dQ' R', on a q = Q' $\frac{R'}{d}$. Même démonstration.
- 9. **Théorème V.** Si on multiplie deux nombres par un troisième, les quotients approchés ne changent pas, mais les restes sont multipliés par ce nombre.

En effet, les relations

entraînent

$$D = d.Q \pm R$$
 et $R < d$
 $D.a = (da).Q \pm Ra$ et $Ra < da$.

10. **Théorème VI**. — Si l'on divise deux nombres par un facteur commun, leurs quotients approchés ne changent pas, mais les restes sont divisés par ce facteur.

Pour fixer les idées, prenons une division faite par défaut; les relations

donnent
$$\begin{array}{ll} \operatorname{D} a = d a. \mathrm{Q} + \mathrm{R}, & \mathrm{R} < d. a \\ d a. \mathrm{Q} < \mathrm{D} a < d a. (\mathrm{Q} + 1), \\ d. \mathrm{Q} < \mathrm{D} < d. (\mathrm{Q} + 1). \end{array}$$

On peut donc écrire $D = d.Q + R_1$, avec $R_1 < d$;

ce qui montre, déjà, que le quotient par défaut n'a pas changé.

Le théorème V donne ensuite

$$R = R_1.a.$$

11. **Théorème VII**. — Dans les conditions du théorème V, comme dans celles du théorème VI, le quotient exact ne change pas.

En effet, les fractions $\frac{D}{d}$ et $\frac{Da}{da}$ sont égales. La seconde contient a fois plus de parties que n'en contient l'autre, mais les parties qui la composent sont a fois plus petites que celles qui composent la première.

SUR LA SOMME DES MIÈMES PUISSANCES

DES COSINUS D'ARCS EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE

Par M. F. X. Y.

Soit S_m la somme cherchée

 $S_m = \cos^m a + \cos^m (a + h) + \dots + \cos^m (a + (n - 1)h)$. De la formule générale de multiplication des arcs :

$$\cos ma = \cos^{m} a - \frac{m(m-1)}{2!} \cos^{m-2} a \sin^{2} a$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} \cos^{m-4} a \sin^{4} a$$

$$- \dots + (-1)^{p} \frac{m(m-1)\dots(m-2p+1)}{2p!} \cos^{m-2p} a \sin^{2p} a \pm \dots$$
on déduit l'égalité

(1)
$$\begin{cases} \cos^{m} a = \cos ma \\ + C_{m}^{2} \cos^{m-2} a \sin^{2} a - C_{m}^{1} \cos^{m-4} a \sin^{4} a + \dots \\ + (-1)^{p-1} C_{m}^{2p} \cos^{m-2p} a \sin^{2p} a + \dots \end{cases}$$

 G_m^{2p} désignant le nombre des combinaisons de m objets, 2p à 2p. Si l'on remplace, successivement, dans l'égalité (1), a par a+h, a+2h, ... a+(n-1)h, on obtient les (m-1) égalités suivantes :

$$\cos^{m}(a+h) = \cos m(a+h) + C_{m}^{2} \cos^{m-2}(a+h) \sin^{2}(a+h)$$

$$= C_{m}^{4} \cos^{m-1}(a+h) \sin^{4}(a+h)$$

$$+ \dots + (-1)^{p-1} C_{m}^{2p} \cos^{m-2p}(a+h) \sin^{2p}(a+h)$$

$$\cos^{m}(a + (n - 1)h) = \cos m(a + (n - 1)h) + C_{m}^{2} \cos^{m-2}(a + (n - 1)h) \sin^{2}(a + (n - 1)h) - C_{m}^{4} \cos^{m-4}(a + (n - 1)h) \sin^{4}(a + (n - 1)h) + ... + (-1)^{p-1}C_{m}^{2p} \cos^{m-2p}(a + (n - 1)h) \sin^{2p}(a + (n - 1)h)$$

d'où l'on déduit en ajoutant ces égalités

(2)
$$\begin{cases} S_m = \cos ma + \cos m(a+h) + \dots \\ + \cos m(a+(n-1)h) + C_m^2 \sum \cos^{m-1} a \sin^2 a \\ - C_m^4 \sum \cos^{m-1} a \sin^4 a + \dots \\ + (-1)^{p-1} C_m^{2p} \sum \cos^{m-2p} a \sin^{2p} a \pm \dots \end{cases}$$

La somme des termes entre crochets est la somme de cosinus d'arcs en progression arithmétique; elle a pour expression, d'après une formule connue:

$$\frac{\cos m\left(a+(n-1)\frac{h}{1}\right)\sin\frac{mnh}{2}}{\sin\frac{mh}{2}}.$$

On a, d'autre part :

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$$

 $\sin^4 a = 1 - 2 \cos^2 a + \cos^4 a$

 $\sin^{2p} a = 1 - p \cos^2 a + \frac{p(p-1)}{2!} \cos^4 a + \dots + (-1)^p \cos a^{2p}$

L'égalité (2) peut donc s'écrire :

$$Sm = \frac{\cos m\left(a + (n-1)\frac{h}{1}\right)\sin\frac{mnh}{2}}{\sin\frac{mh}{2}} + C_m^2(S_{m-2} - S_m)$$

$$- C_m^4(S_{m-1} - 2S_{m-2} + S_mm) + \dots$$

$$+ (-1)_{p-1}C_m^{2p}(S_{m-2p} - pS_{m-2p+2} + \frac{p(p-1)}{2!}S_{m-2p+3} \pm \dots + (-1)^pS_m) + \dots$$

et, en ordonnant:

(3)
$$\begin{cases} S_{m}(1 + C_{m}^{2} + C_{m}^{3} + \ldots) = \frac{\cos m\left(a + (n-1)\frac{h}{1}\right)\sin\frac{mnh}{2}}{\sin\frac{mh}{2}} \\ + S_{m} - 2\left(C_{m}^{2} + 2C_{m}^{4} + 3C_{m}^{6} + \ldots\right) \\ - S_{m} - 4\left(C_{m}^{4} + 3C_{m}^{6} + 4C_{m}^{8} + \ldots\right) \\ + (-1)^{p-1}S_{m} - 2p\left(C_{m}^{2} + (p+1)C_{m}^{2p+2} + (p+2)C_{m}^{2p+3} + \ldots\right) + \ldots \end{cases}$$

On peut, à l'aide de cette formule, calculer successivement $S_2, S_1 \ldots S_{2p}, S_2, S_5 \ldots S_{2p-1} \ldots$

$$S_{2} = \frac{\cos\left(2a + (n-1)h\right)\sin nh}{2\sin h} + \frac{n}{2}$$

$$S_{3} = \frac{1}{4} \frac{\cos 3\left(a + (n-1)\frac{h}{1}\right)\sin \frac{3nh}{2}}{\sin 3h} + \frac{3}{4} \frac{\cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)\sin \frac{hn}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$$

$$S_4 = \frac{\cos(4a + (n-1)2h)\sin 2nh}{8\sin 2h} + \frac{\cos(2a + (n-1)h)\sin nh}{2\sin h} + \frac{3n}{8}$$

Si dans la formule (3) on change a en $\frac{x}{2} - a$ et h en -h, on obtient une expression de la somme des mièmes puissances des sinus d'arcs en progression arithmétique.

Si dans la formule (3) on fait $h = \frac{2x}{n}$ il vient :

$$S_m(1 + C_m^2 + C_m^4 + \ldots) = S_{m-2}(C_m^2 + 2C_m^4 + 3C_m^6 + \ldots) - S_{m-4}(C_m^4 + 3C_m^6 + 4C_m^8 + \ldots) + \ldots + (-1)^{p-1}S_{m-2p}(C_m^{2p} + (p+1)C_m^{2p+2} + (p+2)C_m^{2p+4} + \ldots)$$
Or an vérifie aisément que $S_n = 0$

Or, on vérifie aisément que $S_1 = 0$.

On a donc $S_3 = 0$, $S_5 = 0 \dots S_{2p+1} = 0$.

On voit de même que $S_2 = \frac{n}{2} S_4 = \frac{3n}{8} \dots$

Ainsi, dans ce cas, la somme Sm est indépendante des angles.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1894

Solution par M. A. Droz-Farny.

On considère un quadritatère Q de sommets A, B, C, D, dont les diagonales se coupent en O. et les cercles circonscrits aux triangles OAB, OBC, OCD et ODA. Les centres O₁, O₂, O₃, O₄ de ces cercles sont les sommets d'un parallélogramme P.

1º Le parallélogramme P étant donné, démontrer que tous les quadrilatères Q qui lui correspondent ont une surface constante

et des diagonales de lonqueur constante.

2º Le parallélogramme P étant donné et le point O étant assujetti à décrire une droite Δ , prouver que les sommets du quadrilatère Q se déplacent sur les côtés d'un parallélogramme P'; étudier la déformation de P' quand Δ varie; trouver les positions de la droite Δ pour lesquelles le parallélogramme P' a une surface maximum.

3° Construire le quadrilatere Q, connaissant le parallélogramme P et soit deux angles de Q, soit les rapports $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{CB}{CD}$. Discuter.

4º On suppose que le quadrilatère Q soit inscriptible; connaissant le parallélogramme P, trouver le lieu des sommets de Q et le lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère. (Ces lieux sont des coniques.)

1°. Soient A', B', C', D' les points milieux des segments OA, OB, OC, OD. Élevons en A' et C' sur AC, puis en B' et D' sur BD des perpendiculaires. Ces droites parallèles, deux à deux déterminent le parallélogramme O₁O₂O₃O₄.

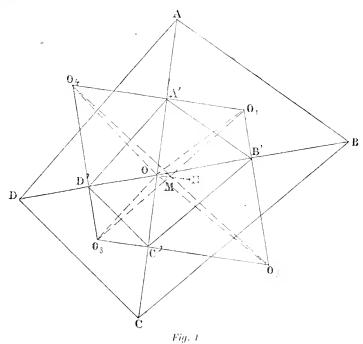
Les droites A'C' et B'D' sont les hauteurs de P. On a donc pour l'aire de ce parallélogramme : $P = \frac{A'C'.B'D'}{\sin \Omega}$.

De par la construction AC = 2A'C' et BD = 2B'D'.

Or, aire
$$Q = \frac{AC.BD}{2} \sin O = 2A'C'.B'D' \sin O$$

 $O = 2P \sin^2 O$

3°. Les quadrilatères ABCD et A'B'C'D' sont homothétiques; le rapport de similitu le étant 1:2. P étant donné, il suffira donc de construire, dans les trois cas proposés, les quadrilatères A'B'C'D'.



1er Cas: 2 angles adjacents A et B sont donnés.

Dans les quadrilatères inscriptibles $D_1OA_1O_4$ et $A_1OB_1O_1$ on a angle $D_1A_1O = OO_4D_1$ et angle $OA_1B_1 = OO_1B_1$; il en résulte angle $O_4OO_1 = A_1$; de même angle $O_4OO_2 = B_1$.

Le point O est donc déterminé par l'intersection de deux segments de cercles décrits sur les côtés O_4O_1 et O_1O_2 et capables respectivement des angles A_1 et B_1 . Les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les côtés de P sont les sommets du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$. Ce cas admet une solution unique.

2me Cas: 2 angles opposés A' et C' sont donnés.

Comme dans le cas précédent, le point O est déterminé par l'intersection de deux segments de cercles décrits sur les côtés O_1O_4 et O_2O_3 et capables respectivement des angles A_1 et C_1 .

Ce cas admet deux solutions, une solution ou aucune solution, suivant que les cercles se coupent, se touchent ou ne se coupent pas.

 3^{me} Cas: On connaît les rapports $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{CB}{CD}$.

Dans le quadrilatère inscriptible A₁OB₁O₁ on a

$$A_1B_1 = OO_1 \sin O:$$

de même

$$A_1D_1 = OO_4 \sin O.$$

Donc

$$\frac{A_1B_1}{A_1D_1} = \frac{OO_1}{OO_4};$$

on trouve identiquement

$$\frac{C_1B_1}{C_1D_1} = \frac{OO_2}{OO_3} \cdot$$

Le point O est donc déterminé par l'intersection de deux cercles d'Apollonius. Même remarque que précédemment pour le nombre des solutions.

 4° . Dans les quadrilatères inscriptibles $D_4OA_4O_4$ et $B_4OC_4O_2$ on a :

angle $OA_1D_1 = OO_4D_1$ et angle $OB_1C_1 = OO_2C_1$.

Le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ étant inscriptible, on a aussi angle $OA_1D_1 = OB_1C_1$

et par conséquent.

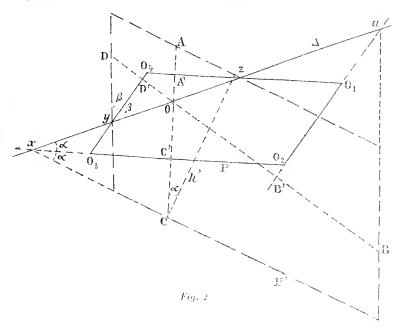
angle
$$00_40_3 = 00_90_3 = 9$$
.

Les rayons O_4O et O_2O décrivent donc deux faisceaux symétriquement égaux admettant comme rayons homologues: pour $\varphi = O_1 O_2 O_3$ et O_2O_3 ; et, pour $\varphi = O_4$, O_4O_4 et O_2O_1 .

Le lieu du point O est une hyperbole équilatère circonscrite au parallélogramme P. Ses asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles de P. Les lieux des sommets du quadrilatère Q sont donc des hyperboles équilatères symétriques du lieu de O par rapport aux côtés de P.

Les perpendiculaires élevées sur B'D' et A'C' en leurs points milieux x et y se coupent en M, centre de la circonférence circonscrite à A'B'C'D' et point de rencontre des diagonales du parallélogramme P.

Or les centres M et N des circonférences circonscrites aux quadrilatères A'B'C'D' et ABCD sont des points homologues de deux figures homothétiques; donc N est le symétrique de O par rapport au point fixe M et, comme ce deruier est le centre de l'hyperbole équilatère lieu de O, il résulte que les lieux de O et de N coïncident.



2°. Supposons que la droite Δ rencontre les côtés O_2O_3 et O_2O_1 du parallélogramme respectivement sous les angles α et β ; on a évidemment $\alpha + \beta = 0$, angle du parallélogramme. Représentons par x, y, z, u les intersections de Δ avec les côtés de P. A étant le symétrique de O par rapport au côté O_1O_4 , lorsque O se meut sur Δ , Δ décrira une droite symétrique de Δ par rapport à O_1O_4 ; de même pour

les autres sommets. Les symétriques de Δ relatives à deux côtés opposés de P sont évidemment parallèles, car elles forment avec ces côtés des angles égaux α ou β . On obtient donc un parallélogramme P' d'angles $2(\alpha + \beta) = 20$ et 180 - 20 dont nous allons évaluer la surface.

Représentons par h' et h'' les hauteurs de ce parallélogramme.

On trouve aisément

$$h' = AC. \cos \alpha, \ h'' = BD \cos \beta,$$

$$d'où \qquad P' = \frac{h'h''}{\sin \alpha} = \frac{AC.BD \cos \alpha. \cos \beta}{\sin \alpha}$$

Il résulte de cette formule que la surface de P' ne change pas lorsque Δ se déplace parallèlement à elle-même.

Comme $\alpha + \beta = \text{constante} = 0$, le maximum de $\cos \alpha \cos \beta$ a lieu pour $\alpha = \beta$ en vertu de l'identité:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
.

P' a donc sa valeur maximum lorsque Δ est également inclinée sur les côtés de P.

EXERCICES DIVERS

Par Aug. Boutin

356. — Trouver trois carrés entiers en progression arithmétique.

On a à résoudre en nombres entiers l'équation :

$$X^2 + Y^2 = 2Z^2$$

qui est complètement résolue par l'identité

 $(2a^2 - b^2)^2 + (2a^2 + b^2 - 4ab)^2 \equiv 2(2a^2 - 2ab + b^2)^2,$

où a et b sont des entiers quelconques. Le problème admet donc une infinité de solutions. On peut remarquer que les trois nombres X, Y, Z sont de la même parité, celle de b.

357. — On partage la suite naturelle des nombres en groupes contenant le premier trois nombres, le deuxième cinq nombres, $n^{\text{ième}}$, 2n+1 nombres; vérifier que le premier nombre du $n^{\text{ième}}$ groupe est n^2 et que la somme des n+1 premiers termes de ce groupe est égale à la somme des n derniers.

Il en résulte que les carrés des nombres

$$2n^2 - 1$$
, $2n^2 + 2n + 1$, $2n^2 + 4n + 1$,

(n entier, positif quelconque) sont en progression arithmétique, ce qui nous fournit une infinité de solutions, mais non toutes les solutions de la question posée à l'exercice precèdent. Ces solutions répondent à l'hypothèse b = -1.

358. — Trouver trois triangulaires en progression arithmétique.

2m(m+1) = n(n+1) + p(p+1).

On a à résoudre en nombres entiers l'équation

Si on pose

$$m = \frac{z-1}{2}$$
, $n = \frac{x-1}{2}$, $p = \frac{y-1}{2}$,

l'équation précédente revient à

 $2Z^2 = x^2 + y^2$

et le problème considéré se ramène à celui de l'exercice 356. On aura donc des valeurs convenables pour m, n, p, en partant des solutions impaires de l'équation (1). Toutes les solutions du problème proposé sont alors fournies par l'identité :

$$\frac{1}{2}(a^2-2b^2-2b-1)(a^2-2b^2-2b) + \frac{1}{2}(a^2-2b^2-4ab-2a-2b) + a^2-2b^2-4ab-2a-2b+1 + \frac{1}{2}(a^2-2ab+2b^2-a+2b) + a^2-2ab+2b^2-a+2b+1 + \frac{1}{2}(a^2-2ab+2b^2-a+2b+1) + \frac{1}{2}(a^2-2ab+2b+1) + \frac{1}{2}(a^2-2ab+1) + \frac{1}{2}(a^2-2ab$$

où a et b désignent des entiers quelconques.

- **359.** Si un cube entier est terminé par 4 ou 8, le chisser des dizaines est pair; s'il est terminé par 2 ou 6, le chisser de ses dizaines est impair.
- **360.** On considère la suite récurrente de Lamé (ou de Fibonacci) :

$$u_1 = 1$$
, $u_2 = 1$. $u_3 = 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

Démontrer les formules

$$u_{n-1} u_n u_{n+1} = u_n^3 + (-1)^n u_n$$

$$u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \ldots + u_n^3 = 1 + 3u_n u_{n-1} u_{n-3} - u_{n-2}^3$$
.

361. — $u_1, u_2 \dots u_n$ désignant les termes de la même suite. sommer :

$$S = \frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} + \frac{1}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

(Question proposée par Ed. Lucas. — Théorie des nombres.)

On trouve, en groupant les termes par deux, après quelques transformations :

$$S = \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

362. — I° a désignant \sqrt{x} évaluée à l'unité près par défaut.

Si dans la transformation de \sqrt{x} en fraction continue, la période des quotients incomplets comprend n fois l'unité et 2a, le nombre x a pour valeur :

$$x = a(a + 1) + \frac{au_{n-2} + u_{n-1}}{u_{n+1}};$$

 \mathbf{u}_n désignant le terme de rang \mathbf{n} de la suite de Lamé, où l'on suppose $\mathbf{u}_0 = \mathbf{o}$.

2º On peut toujours trouver une infinité de valeurs de a telles que x soit entier, sauf dans le cas où n + 1 est un multiple de 3.

363. — On considère la suite récurrente :

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n = pu_{n-1} - u_{n-2}.$$

Démontrer la formule :

$$u_{n+1}^2 + u_n^2 - pu_n u_{n+1} = u_1^2 + u_0^2 - pu_1 u_0.$$

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Dellac, professeur au lycée de Marseille.

« ...Le théorème principal de la note de M. Dorlet sur les polyèdres semblables (J. E., 1894, p. 231) n'est pas nouveau. Il y a longtemps que j'ai établi l'existence du centre de similitude de deux polyèdres semblables. On en trouve une démonstration dans les Éléments de Géométrie de Ricart » (2° vol., p. 133. Garnier frères.) (*).

BIBLIOGRAPHIE

Tableau métrique de Logarithmes, par M. C. Dumesnil. — Tableau complet in-8°, en noir, 0 fr. 75; in-4°. en deux couleurs, 1 fr. 50. Instruction, 1 fr. 50.

On sait que les logarithmes permettent de ramener à de simples additions les calculs les plus compliqués; malheureusement la plupart des

^(*) La question 600, proposée plus loin, fait suite à cette théorie-

Tables parues jusqu'à ce jour ont été éditées sous forme de volumes peu

portatifs, d'une lecture souvent difficile.

Or le Tableau métrique de Logarithmes à cinq décimales, que nous avons sous les yeux, est groupé de telle sorte que les logarithmes de tous les nombres de 1 a 10.000 sont indiqués d'une façon très nette, très lisible, sur un seul feuillet in 4°; il est donc impossible de désirer une Table plus complète, sous une forme plus portative.

La lecture de ce tableau est si facile qu'il suffit d'une étude de quelques minutes pour être en mesure de passer instantanément, sans hésitation aucune, d'un nombre quelconque au logarithme de ce nombre, ou du

logarithme au nombre.

Éléments de Trigonométrie, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire moderne (conformes aux programmes du 15 juin 1894), par MM. Ch. Vacquant, inspecteur général et Macé de Lépinay, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

On sait que le programme de la trigonométrie dans l'enseignement moderne est partagé entre la seconde et la première-sciences. Ces deux programmes sont absolument distincts au point de vue des matières qui y sont traitées; l'esprit qui les inspire est aussi très différent. Ce n'est que dans la piemière-sciences qu'on développe le théorème des projections et qu'on établit les formules relatives à l'addition des axes, formules qui sont la conséquence toute naturelle de ce théorème fondamental. Il en résulte une difficulté qui ne se rencontre pas dans l'enseignement classique et sur laquelle nous désirons appeler l'attention de nos lecteurs.

Le programme de seconde indique, a propos de la résolution des triangles, « on établit GEOMÉTRIQUEMENT les formules dont on a besoin ». Parmi les

démonstrations, se présente celle de la formule classique

(1)
$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{A + B}{2},$$

utilisée dans le deuxième vas (données a, b, C_0 . On sait comment on déduit cette formule des relations

(2)
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$
(3)
$$A + B = 180^{\circ} - C.$$

Mais les transformations nécessaires pour déduire (1) des égalités (2), (3), ne peuvent être présentées aux élèves de la seconde moderne qui ne sont pas en possession des formules que l'on emploie dans le calcul classique auquel nous faisons allusion. C'est pourquoi, le programme exige l'établissement de (1) par des considérations géométriques. On lira à la page 81 du tivre, excellent à tous les points de vue, que nous signalons à l'att-ntion de nos lecteurs, la démonstration ingénieuse proposée par MM. Vacquant et Macé de Lépinay. Cette question n'est pas aussi simple qu'elle le paraît au premier abord. N'y a-t-il pas moyen de tourner autrement cette difficulté? Nous posons la question à nos lecteurs; peut-être intéressera-t-elle quelques-uns d'entre eux et nous publierons avec plaisir les réflexions qu'ils pourrraient nous envoyer sur ce sujet.

Nous avons reçu et nous signalons à l'attention de nos lecteurs les ouvrages suivants :

Géométrie générale, par D.-Z. Garcia de Galdeano, professeur de Géométrie analytique à l'Université de Saragosse.

Théorie des Quantités imaginaires, par D. Atanasio Lasala y Martinez (Première partie: les imaginaires dans le plan; Bilbao, 1894).

Géométrie descriptive élémentaire et ses applications (1ervolume, Paraisa et Cie, éditeurs; prix 2 fr. 75), par le Dr S. Ortu Carboni.

Cours de Géométrie descriptive (à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire moderne), par M. Ch. Brisse (Librairie Gauthier-Villars, 1895).

On nous prie d'annoncer aux lecteurs du Journal l'apparition d'une nouvelle Revue portant le nom de l'Étranger. Cette revue est internationale, politique, littéraire, scientifique et artistique. Elle nous paraît répondre a un besoin auquel on n'a pas suffisamment songé jusqu'ici, le besoin de connaître ce qui se dit de nous à l'étranger et de savoir ce qu'on y fait, ce qu'on y pense. Voici d'ailleurs quelques lignes, extraites du programme que s'est tracé la rédaction de cette revue et qui fera connaître le but qu'elle se propose d'atteindre.

« Toute Nation qui voudrait aujourd'hui s'isoler des pays voisins, et vivre par elle-même, serait inévitablement condamnée à la déchéance et

à la mort.

» Plus un peuple sera au courant de ce qui se passe chez les nations qui l'entourent, mieux il saura profiter de leur exemple, tirer parti de leur sages réformes, éviter leurs erreurs, plus ce peuple sera grand et fort.

» Etre utile à notre pays par la comparaison constante de ce qui se fait à l'étranger avec ce qui se passe chez nous; hâter l'œuvre de la civilisation par la recherche et l'étude des progrès réalisés autour de nous; mettre ainsi toutes nos forces au service de la France, au service de l'humanité entière: tel est le but que se propose notre Revue. »

L'Étranger paraît tous les mois (à dater du 1er décembre 1894). Les abonnements (6 fr. pour la France; 7 fr. pour les pays de l'Union postale), doivent être demandés à M. Lombard, 77, rue Denfert-Rochereau.

Comme tous les ans à pareille époque, l'Annuaire du Bureau des Longitudes vient de paraître. L'Annaire pour 1895 renferme une foule de reuseignements pratiques réunis dans ce petit volume pour la commodité d's travailleurs. On y trouve égal-ment des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, e'c., enfin les Notices survantes : Les Ondes almosphériques lunaires; par M. Bouquet de la Grye. — Sur le Congrès géndésique d'Insprück; par M. F. Tiss rayd. — L'observato re du mont Blanc; par M. J. Janssen. — La Photométrie photographique: par M. J. Janssen. — Rupport sur les propositions d'unification des jours astronomique et civil: par M. H. Poincaré. In-18 de IV-826 pages, avec deux cartes magnétiques. (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1 fr. 50 c.; franco, 1 fr. 85.)

BACCALAURÉATS

Académie de Besançon.

- I. Entre quelles valeurs de x le quotient $y = \frac{x^2 4x}{x^2 5x + 6}$ peut-il prendre des valeurs supérieures à 1? Entre ces valeurs de x, quelle est la plus petite valeur que ce quotient puisse prendre? Représenter la marche de la fonction.
- II. Questions à choisir : (a) Mener les tangentes à l'ellipse par un point de son plan; (b) La sous-normale en un point quelconque d'une parabole a une longueur constante; (c) Définition de l'hélice. Propriété de la tangente.

2º Problème. — Ranger, par ordre de grandeur croissante, les racines

a, b, de l'équation

 $x^2 - mx - 1 = 0$

et les racines c et d de l'équation $x^2 + mx - 1 = 0$,

m étant un nombre donné positif.

III. — 1º Volume du tronc de pyramide à bases triangulaires et parallèles.

2º Discuter la fraction $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ et construire la courbe correspondante.

Académie de Bordeaux.

1º Problème. — On donne deux circonférences O, O', de rayons respectifs R et r, la circonférence O' passant par le centre O de la première. Mener à la circonférence O' une tangente NMN', telle que la somme des carrés des segments MN, MN', interceptés à partir du point de contact sur cette tangente par la circonférence O, soit égale a une quantité donnée K^2 . On cherchera l'angle y que fait alors le rayon O'M allant au point de contact avec la ligne des centres OO'. — Conditions de possibilité.

2º Questions à choisir : (a) Volume du segment sphérique; b. Limite de la somme des dièdres d'un angle trièdre; (c) Deux polyèdres symétriques

sont équivalents.

Académie de Caen.

Questions à choisir: (a) Faire et expliquer l'épure propre à déterminer l'angle d'un plan quelconque défini par ses traces avec le plan bissecteur du dièdre formé par les plans de projection.

(b) Déterminer les valeurs du paramètre m pour lesquelles les quatre

racines de l'équation

 $x^{1} + (3m + 2)x^{2} + m^{2} = 0$

forment une progression arithmétique.

(c) Montrer que tout déplacement d'une figure plane dans son plan peut être obtenu à l'aide d'une rotation ou une translation, suivant les cas.

Académie de Clermont.

1° Composition d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide.

2º Problème. - On donne un triangle isoscèle ABC; l'angle au sommet A vaut 120°, les côtés AB, AC sont égaux à a. Trouver sur les perpendiculaires menées en B et C au plan de ce triangle deux points P et Q, tels que APQ soit rectangle en A et que le volume ABCPQ ait une valeur donnée. - Discussion.

Académie de Dijon.

I. - Construire les traces d'un plan, sachant qu'elles sont respectivement parallèles à des droites données sur l'épure et connaissant, après son rabattement sur le plan horizontal, le rabattement d'un point du plan cherché dout la cote est donnée.

II. — Calculer les angles d'un triangle rectangle, connaissant l'angle aigu sous lequel se coupeut les médianes issues des sommets des angles aigus. Dire la condition de possibilité du problème et la forme du triangle dans le cas extrême où elle est satisfaite.

III. — Calculer les coefficients p, q et les racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

sachant que les racines, augmentées de l'unité, chacune, deviennent celles de l'équation

$$x^2 - px + pq = 0.$$

IV. - Minimum de l'expression

$$\sqrt{x^2+4-2x}+\sqrt{x^2+q-3x}$$

et valeur de x pour laquelle cette expression est minimum.

 V. — 1º Volume du segment sphérique. Volume du tronc de pyramide à bases parallèles. Volume du tronc de prisme triangulaire.

2º Problème. Dans un triangle ABC, on joint le sommet A à un point quelconque M du côté opposé BC, puis, par ses autres sommets B, C, on mène à la droite MA des parallèles rencontrant CA et BA prolongés aux points N et P. Prouver que l'on a toujours

$$\frac{r}{MA} = \frac{r}{BN} + \frac{r}{CP}.$$

Comment cette relation doit être modifiée lorsque le point M est pris sur le prolongement du côté BC ?

VI. - 1º Réduction des forces appliquées à un corps solide, à une force et à un couple.

2º Problème. — Une droite est située dans le plan vertical de projection et fait un angle a avec la ligne de terre, un plan passe par la ligne de terre et fait unangle β avec le plan horizontal; calculer l'angle de la droite et du plan.

VII. - 1º Équilibre d'un corps pesant placé sur un plan incliné.

2º Problème. - Par les sommets BC des angles aigus d'un triangle rectangle ABC, on mène deux droites mutuellement parallèles qui rencoutrent en MN respectivement les prolongements des côtés de l'angle droit CA, BA, et on demande comment il faut diriger ces parallèles pour que la somme des aires des triangles BAM, CAN, soit un minimum.

VIII. - Calculer le rayon d'une circonférence tangente à deux circonférences données de rayon R et R', et à la droite qui joint leurs

centres. - On désignera par d la distance des centres.

QUESTION 515

Solution par M. ALETROP.

Résoudre le système d'équations

$$\frac{1}{by} + \frac{1}{cz} = \frac{a+x}{ax(a-x)},$$

$$\frac{1}{cz} + \frac{1}{ax} = \frac{b+y}{by(b-y)},$$

$$\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} = \frac{c+z}{cz(c-z)}.$$

(E. Lemoine.)

On trouve aisément

(1) $x(a-x) = y(b-y) = z(c-z) = \lambda$, (en représentant par λ ces produits égaux) et

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Or, si nous désignons par a, b, c les longueurs de trois céviennes (*) d'un triangle, les segments déterminés sur elles par leur point de concours et les bases du triangle, satisfont à l'équation (2) (théorème de Gergonne); et alors, pour qu'ils satisfassent aussi aux équations (1), il faut que lesdites céviennes soient les hauteurs du triangle considéré.

Nous écrirons, pour prendre les dénominations habituelles,

$$a=h_a$$
, $b=h_b$, $c=h_c$;

x, y, z sont les distances de l'orthocentre aux trois côtés du triangle ABC qui a pour hauteurs h_a, h_b, h^c .

Si a, b, c désignent les côtés de ce triangle et R le rayon du cercle circonscrit, on a, par conséquent

$$x = 2R \cos B \cos C$$
.

Mais $h_a = {}_{2}\mathbf{R} (\cos \mathbf{A} + \cos \mathbf{B} \cos \mathbf{C}) = {}_{2}\mathbf{R} \sin \mathbf{B} \sin \mathbf{C}$ $= 8\mathbf{R} \sin \frac{\mathbf{B}}{2} \cos \frac{\mathbf{B}}{2} \sin \frac{\mathbf{C}}{2} \cos \frac{\mathbf{C}}{2},$ $\mathbf{d}'où \qquad x = \frac{h_a \cos \mathbf{B} \cos \mathbf{C}}{2}.$

 $x = \frac{h_a \cos B \cos C}{4 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$

^(*) Les céviennes d'un triangle sont les droites qui joignent un point de son plan aux trois sommets.

Or, de la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, on tire

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} = \frac{2}{h_b h_c} \cos A,$$

d'où l'on déduit

$$\cos A = \frac{\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} - \frac{1}{h_a^2}}{\frac{2}{h_b h_c}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}{\frac{1}{h_b h_c}}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h^a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)}{1}}$$

d'où enfin

$$x = h_a \frac{\left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} - \frac{1}{h_c^2}\right) \left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_c^2} - \frac{1}{h_b^2}\right)}{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right) \left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b}\right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$$

ou, avec les notations de l'énoncé,

$$x = a \; \frac{(b^2c^2 + a^2c^2 - a^2b^2)(b^2c^2 + a^2b^2 - a^2c^2)}{(bc + ca + ab)(ab + ac - bc)(bc + ba - ac)(cb + ca - ab)}$$

On trouve de même y et z. Il est clair que notre hypothèse, que a, b, c soient les hauteurs d'un triangle, n'empêche pas cette solution d'être exacte, si a, b, c ne peuveut être les hauteurs d'un triangle.

Autrement (*). — Retranchons successivement la seconde des équations proposées de la première et la troisième de la seconde, il vient:

(3)
$$\begin{cases} \frac{1}{by} - \frac{1}{ax} = \frac{a+x}{ax(a-x)} - \frac{b+y}{by(b-y)} \\ \frac{1}{cz} - \frac{1}{by} = \frac{b+y}{by(b-y)} - \frac{c+z}{cz(c-z)}, \end{cases}$$

d'où

(4)
$$x(a-x) = y(b-y) = z(c-z).$$

^(*) Cette solution algébrique est de M. DavidogLou.

Faisant la somme des trois équations proposées, on a :

$$\frac{1}{ax}\left(2-\frac{a+x}{a-x}\right)+\frac{1}{by}\left(2-\frac{b+y}{b-y}\right)+\frac{1}{cz}\left(2-\frac{c+z}{c-z}\right)=\text{ o,}$$

$$\text{d'où } \frac{a-3x}{ax(a-x)}+\frac{b-3y}{by(y-b)}+\frac{c-3z}{cz(c-z)}=\text{ o.}$$
et ayant égard à (4)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Posons, pour simplicité:

$$\frac{x}{a} = \alpha; \quad \frac{y}{b} = \beta; \quad \frac{z}{c} = \gamma \quad \text{ et } \quad K_1 = \frac{b^2}{a^2}; \quad K_2 = \frac{b^2}{c^2};$$
alors
$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$
et
$$\alpha^2 \alpha (1 - \alpha) = b^2 \beta (1 - \beta) = c^2 \gamma (1 - \gamma),$$
d'où
$$\frac{\alpha - \alpha^2}{\beta - \beta^2} = K_1; \quad \frac{\gamma - \gamma^2}{\beta - \beta^2} = K_2.$$

Alors

(6)
$$K_1 + K_2 = \frac{\alpha + \gamma - (\alpha^2 + \gamma^2)}{\beta(1 - \beta)} = \frac{(1 - \beta) - (1 - \beta)^2 + 2\alpha\gamma}{\beta(1 - \beta)}$$

еt

(7)
$$K_1 - K_2 = \frac{(\alpha - \gamma)[1 - (\alpha + \gamma)]}{\beta(1 - \beta)} = \frac{\alpha - \gamma}{1 - \beta}$$

L'équation (7), élevée au carré, devient :

$$(K_1 - K_2)^2 (1 - \beta)^2 = (1 - \beta)^2 - 4\alpha\gamma;$$
 d'où
$$\alpha\gamma = \frac{(1 - \beta)^2 [1 - (K_1 - K_2)^2]}{4};$$

(6) devient alors:

$$2(K_1+K_2).\beta.(1-\beta)=2(1-\beta)-2(1-\beta)^2+(1-\beta)^2[1-(K_1-K_2)^2]$$
 d'où écartant la solution $\beta=1$; ce qui donne $y=b$, on a pour β :

$$\beta = \frac{(K_1 - K_2)^2 - 1}{1 + (K_1 - K_2)^2 - 2(K_1 + K_2)} = \frac{\left[b^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) - 1\right] \left[b^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) - 1\right]}{1 + b^4 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)^2 - 2b^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)}.$$
Donc $y = b \cdot \frac{\left[b^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) - 1\right] \left[b^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) + 1\right]}{1 + b^4 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)^2 - 2b^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)}.$

et de même

$$z = c \cdot \frac{\left[c^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) - 1\right] \left[c^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + 1\right]}{1 + c^4 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - 2c^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)},$$

$$x = a \cdot \frac{\left[a^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) - 1\right] \left[a^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + 1\right]}{1 + a^4 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)^2 - 2a^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)};$$

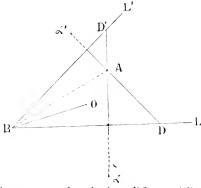
ce qui, tous calculs faits, donne la valeur précédemment trouvée.

QUESTION 559 Solution par A. Droz Farny.

1º On donne un point A et deux droites L, L' qui se coupent en B. Les perpendiculaires abaissées de A sur L, L' rencontrent respectivement ces droites en D et D'. Démontrer que les trois points B, D, D' et les symétriques z, z' de A, relativement à L, L' sont sur une même circonférence.

2º Si, L, L' restant fixes, le point A parcourt une certaine courbe, le centre O du cercle BDD'aa' décrit une courbe symétriquement semblable. (Bernès.)

On sait que dans tout triangle, les points symétriques de



l'orthocentre parrapport aux côtés appartiennent à la circonférence circonscrite au triangle.

Or, dans le triangle BDD, A est l'orthocentre, d'où la première partie.

Comme, dans un triangle, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont conjugués

isogonaux, les droites BO et AB sont symétriques par rap-

port à la bissectrice de l'angle B; on sait en outre que AB = 20B.cos B, ce qui démontre la seconde partie.

Nota. — Autre solution par M. Vazou, professeur au collège de Falaise, et Tzitzéica, élève à l'école normale de Bucharest. Ce dernier nous fait observer que la deuxième partie été déjà proposée sous une autre forme et résolue (Journal 1890, p. 215, q° 340).

QUESTION 563

Solution par M. G. Tzitzéica, à Bucarest.

La normale en un point M quelconque d'une ellipse, de foyers F, et F', rencontre le grand uxe en P et le petit axe en Q.

Soient φ et φ' les symétriques de F et F' par rapport à la normale.

Montrer que les quadrilatères PQ\varphi'\varphi et PQ\varPhi'\varphi sont inscriptibles à un cercle. (E.-N. Barisien).

Les triangles F'Q\varphi', F'P\varphi' sont isoscèles.

 Donc

$$\widehat{PF'Q}=\widehat{P\phi'Q}.$$

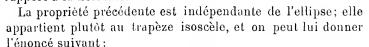
Le triangle FQF' étant de même isoscèle, on a

$$\widehat{F'FQ} = \widehat{FF'Q}.$$

Il en résulte

$$\widehat{F'FQ} = \widehat{P\varphi'Q},$$

ce qui justifie l'énoncé. L'autre quadrilatère est le symétrique du précédent par rapport à la normale.



Les extrémités d'un côté non parallèle d'un trapèze isoscèle, le point de concours des diagonales et le centre du cercle circonscrit sont quatre points d'un même cercle.

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farry, professeur au lycée de Porrentruy; E. Foucart, élève au lycée Michelet, Antoine Davidoglou, élève au lycée Codreano, à Berlad.

QUESTIONS PROPOSÉES

600. — 1º Pour qu'une droite L soit l'axe de similitude (ou droite double) de deux polyèdres semblables P, P', il faut et il suffit que toutes les arêtes homologues soient vues, à partir de L, sous des angles dièdres égaux, chacun à chacun.

Si on ne considérait pas tous les points de l'espace comme rattachés à P et P', il pourrait y avoir exception : déduire

l'exception de la démonstration générale.

2º Pour qu'un point soit le centre de similitude (ou point double) de deux polyèdres semblables, il faut et il suffit que, de ce point, on voie les arêtes homologues sous des angles égaux chacun à chacun.

3º On donne dans l'espace deux angles égaux xAy, x'A'y'; mener un plan qui, en coupant ces deux angles, détermine deux triangles directement semblables ayant des angles

donnés et un rapport donné.

4º On donne les droites L, L' situées d'une manière quelconque dans l'espace et les points A, A' situés sur ces droites; mener un plan parallèle à un plan donné, ou bien passant par une droite donnée, qui coupe les deux droites en des points M, M' tels que, si k est un rapport donné, on ait

$$\frac{A'M'}{AM} = k.$$

Cette dernière partie conduit à une solution géométrique de l'intersection d'une droite avec le paraboloïde hyperbolique.

(H. Dellac.)

601. — On donne dans l'espace un point O et une circonférence sur laquelle se trouvent les sommets A, B, C, D d'un quadrilatère convexe; démontrer que

$$AB.BD.AD.\overline{OC}^2 + BC.CD.BD.\overline{OA}^2$$

 $= AB.BC.AC.O\overline{D}^2 + AC.CD.AD.\overline{OB}^2.$

On demande en outre des conséquences de cette propriété.
(Mannheim.)

Le Directeur-gérant, G. DE LONGCHAMPS.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT (Suite)

Par Mme Vve F. Prime.

II. - SUR LA CONVERSION DES FRACTIONS ORDINAIRES EN DÉCIMALES

A. — Théorèmes fondamentaux.

1. Théorème I. — Si le nombre des décimales crott sans cesse, le nombre décimal tend vers une limite finie et déterminée.

Soit le nombre décimal

$$E, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Si E' est un nombre entier supérieur à E, on a

 $E < E, a_1 < E, a_1 a_2 < \ldots < E, a_1 a_2 \ldots a_m < E'.$

Il en résulte que, u croissant indéfiniment, la valeur du nombre décimal

$$E, a_1 a_2 \ldots a_n$$

augmente indéfiniment, tout en restant toujours inférieure à E'. Donc...

- 2. Définition. La limite trouvée s'appelle la valeur du nombre décimal et il résulte d'un théorème connu qu'on multiplie un nombre décimal par 10^m en avançant la virgule de m rangs vers la droite (lim. PX = P. lim. X).
- 3. Théorème II. La valeur d'un nombre décimal illimité est tout au plus égale à une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui de son premier chissre » ignificatif de gauche.

Soient 0,00 ... 01 une unité du $n^{\text{ième}}$ ordre décimal et

$$0,00 \dots 00 a_1 a_2 \dots$$

un nombre décimal dont le premier chissre significatif est au moins du $(n+1)^{\text{lème}}$ ordre.

On a, quel que soit m,

$$0,00...01 > 0,00...00a_1a_2...a_m$$

et, aussi, 0,00 ... or \geqslant lim. 0,00 ... oo a_1a_2 ...

4. Théorème III. — Deux nombres décimaux égaux sont généralement identiques.

1º Les deux développements sont limités. S'ils n'étaient pas identique, le résultat de leur soustraction ne serait pas nul.

2º Les deux développements sont illimités. Soient V leur valeur commune et V_m , V_m' leurs valeurs limitées à la $m^{i\ell me}$ décimale. On a

$$0 < V - V_m \leqslant \frac{1}{10^m}$$
, et $0 < V - V'_m \leqslant \frac{1}{10^m}$; par suite,

$$V_m - V_m' = 0,$$
 ou $\left| V_m - V_m' \right| < \frac{1}{10^m}$.

Dans le premier cas, V_m est identique à V'_m (1°) et comme m est quelconque, les deux développements sont entièrement identiques.

Quant à la seconde hypothèse, elle doit être rejetée, puisque V_m et V_m' étant multiples de $\frac{1}{10^m}$, leur différence ne peut pas être inférieure à $\frac{1}{10^m}$.

3º Un développement est limité, et l'autre illimité. Vd. C. Th. III.

B. - Conversion des fractions ordinaires en decimales.

I. $R\dot{e}gle$. — Convertir en décimales la fraction ordinaire $\frac{p}{q}$, c'est chercher combien elle contient de dixièmes, de centièmes et ainsi de suite

Faisons les divisions

il en résulte que

$$p = q.E + r.$$
10. $r = q.a_1 + r_1$,
10. $r_1 = q.a_2 + r_2$,
10. $r_2 = q.a_3 + r_3$,
$$\frac{p}{r} = E, a_1 a_2 a_3 + \frac{r_3}{q \cdot 10^3}$$

$$\frac{r_3}{a_1 \cdot 10^3} < \frac{1}{10^3}.$$

avec

On retrouve, ainsi, la règle connue.

2. **Théorème I.** — Si, $\frac{p}{q}$ étant irréductible, q ne contient que les facteurs 2 et 5, la conversion se fait exactement et le nombre des décimales est égal au plus haut exposant des facteurs 2 et 5 dans q.

Soit
$$q = 2^m \cdot 5^n$$
, avec $m > n$; on a $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot 5^{m-n}}{10^m}$.

quotient qui aura bien m chiffres décimaux; car, m étant plus grand que n, p est premier avec 2 et $p.5^{m-n}$ n'est pas multiple de 10.

3. Théorème II. — Si q renferme d'autres facteurs premiers que 2 et 5, la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ ne se convertit pas exactement en décimales.

Si on pouvait avoir $\frac{p}{q} = \frac{a}{10^m}$, avec a entier, on aurait

$$a = \frac{p.10^{m}}{q}$$
,

égalité impossible, q étant premier avec p et ne divisant pas $10^{\rm m}$.

4. Théorème III. — Si le développement de $\frac{p}{q}$ en décimales est illimité, sa valeur est égale à $\frac{p}{q}$.

Soient V_m la valeur du développement limité au m^e chiffre décimal et V, la limite de V_m .

On a
$$o < \frac{p}{q} - V_m < \frac{1}{10^m}$$
 (n° 1)
et $o < V - V_m \leqslant \frac{1}{10^m}$. (A. n° 3)

Deux cas peuvent se présenter :

1° V
$$-\frac{p}{q}=$$
 o et alors $V=\frac{p}{q}$.

2º Ou bien $\left| V - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{10^m}$, mais comme m est aussi grand qu'on le veut, on a encore $V = \frac{p}{q}$.

- 5. Théorème IV. Si le développement est illimité, il est nécessairement périodique, simple ou mixte.
- 6. Théorème V. Si q est premier avec 10, $\frac{p}{q}$ donne naissance à une fraction périodique simple.

Soit m le nombre des chiffres de la période et supposons que la n^c chiffre décimal appartienne à la période. On a alors

$$\begin{array}{ccc} p. \log^{m+n} = \mathrm{M}q + r, \\ \mathrm{et} & p. \log^n = \mathrm{M}q + r, \\ \mathrm{d'où} & \log^n(p. \log^m - p) = \mathrm{M}q. \end{array}$$

Mais 10ⁿ est premier avec q, donc $p.10^m - p = Mq$,

et le premier reste qui se reproduit est celui qui correspond au dividende p.

7. **Théorème VI**. — Si q est premier avec 10 et si p n'est pas un multiple de 10, la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ est la génératrice d'une fraction périodique simple dont la période et la partie entière ne sont pas terminées par le même chiffre.

Le développement est périodique simple (Th. I) et si la période a m chiffres, on a

$$p = Aq + r \text{ et } p.10^{m} = A'.q + r,$$

$$p(10^{m} - 1) = (A' - A).q.$$

Si A' et A étaient terminés par le même chiffre, A' - A serait divisible par 10, mais il est bien clair que 10 ne divise pas le premier membre de l'égalité.

8. Theorème VII. — Si le dénominateur de la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, sans être premier avec 10, contient d'autres facteurs premiers que 2 et 5, le développement est périodique mixte et le nombre des chiffres irréguliers (on ne compte pas la partie entière) est égal au plus haut exposant de 2 et 5 dans 9.

Soit $q = 2^m \cdot 5^n \cdot q_1$ où q_1 est premier avec 10 et m > n. On a $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot 5^{m-n}}{q_1} \cdot \frac{1}{10^m}.$

D'après le théorème VI, la fraction $\frac{p \cdot 5^{m-n}}{q_1}$ donne naissance à une fraction périodique simple dont la période et la partie entière ne se terminent pas par le même chiffre. Or, on en déduit $\frac{p}{q}$ en déplaçant la virgule de m rangs vers la gauche; tous les chiffres introduits sont irréguliers.

9. Théorème. - Les réciproques des théorèmes précédents sont vraies; elles s'énoncent:

Lorsqu'une fraction décimale résulte de la conversion de la fraction ordinaire irréductible $\frac{p}{q}$ en décimales : 1° Si la fraction est limitée, q na contient que les facteurs 2

et 5.

2º Si la fraction est périodique simple, q est premier avec 10.

3º Si la fraction est périodique mixte, q, sans être premier avec 10, contient d'autres facteurs que 2 et 5.

- C. Conversion des fractions décimales périodiques en fractions ordinaires.
 - 1. Théorème I. $\lim_{n \to \infty} o_n abcabe... = \frac{abc}{agg}$.
 - 2. Théorème II. $\lim_{n \to \infty} o_n abrstrst... = \frac{abrst ab}{ogggg}$.
- 3. Théorème III. Un développement limité peut être égal à un développement illimité si celui-ci est périodique et de période 9. Soient les deux nombres,
 - (1) $E, a_1 a_2 \ldots a_m$
 - $E', b_1b_2 \ldots b_mc_1c_2c_3 \ldots$ (2)

Désignons, par V, leur valeur commune et posons $V_m = E', b_1 b_2 \dots b_m$

On a, à cause de (2).

$$(3) o < V - V_m \leqslant \frac{1}{10^m}$$

Remplaçant V par (1), on voit que l'hypothèse

$$V - V_m < \frac{1}{10^m}$$

est irréalisable. On doit donc avoir

$$V - V_m = \frac{I}{I O_m},$$

ce qui montre que les deux développements (1) et (2) sont identiques jusqu'au $(m-1)^e$ chiffre décimal et que a_m surpasse b_m de une unité.

En remplaçant, dans (4), V par (2), on a

$$0,00...00c_1c_2c_3...=\frac{1}{10^m};$$

mais, d'après le théorème II,

$$0,00...00999... = \frac{1}{10^m}$$

Donc (A, Th. III)
$$c_1 = e_2 = c_3 = \ldots = 9$$
.

C. Q. F. D.

4. Corollaire. — La valeur d'une fraction décimale périodique se confond avec la génératrice, lorsque la période n'est pas 9.

SUR LES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

Par M. Maurice Fouché, professeur à Sainte-Barbe.

Le Journal de Mathématiques élémentaires s'est occupé à plusieurs reprises de la question des caractères de divisibilité; mais la plupart des articles publiés à ce sujet ne présentent pas le degré de généralité que comporte la question, si ce n'est celui qui a paru sans signature dans le numéro de mars 1894, et qui résout le problème d'une manière absolument nouvelle. On se trouve donc actuellement en présence de deux méthodes: l'ancienne, fondée sur la considération des résidus des puissances successives de 10 par rapport au diviseur, qui conduit à multiplier les chiffres du nombre proposé par ces résidus, et la nouvelle reposant sur la possibilité de mettre un certain multiple de 10 sous la forme nd ± 1, et conduisant à diviser le nombre des dizaines par un nombre convenable. Cette dernière est certainement préférable, pourvu que le diviseur par lequel il faut diviser les dizaines ne soit pas trop grand, attendu qu'elle amène assez vite, par des opérations uniformes. la réduction du nombre proposé à un nombre très petit. Cependant, il ne semble pas que l'on ait tiré tout le parti désirable de la méthode des résidus. Le Journal de Mathematiques signale un article sur le même sujet de la Revue

mensuelle de la Société des Sciences de Guatémala qui paraît reposersur la méthode des résidus; mais l'exemple qu'il donne de la divisibilité par 19 montre que, là aussi, on n'a pas apporté toute la simplification possible.

Je crois qu'on arrivera aux caractères présentant le maximum desimplicité en combinant convenablement les deux méthodes. Il est bien clair qu'il ne s'agit pas seulement de reconnaître si la division laisse ou ne laisse pas de reste; mais qu'il faut aussi donner une règle pour calculer ce reste avec le moins de calculs possible; il est clair aussi que la question présente surtout de l'intérêt quand le nombre donné est très grand. Dans ces conditions, on emploiera la méthode des résidus pour réduire, par des additions, des soustractions, ou des multiplications très simples, le nombre proposé à n'avoir qu'un nombre limité de chiffres, lequel dépendra du diviseur, eton appliquera la méthode indiquée dans l'article de mars 1894 sur le nombre ainsi réduit.

Je ne m'occuperai que des nombres écrits dans le système de numération décimale, la généralisation pour un système quelconque de numération ne présentant aucune difficulté. Je considérerai deux cas, suivant que le diviseur donné est premier ou non avec 10; mais je laisserai de côté les diviseurs de la forme 2°53, la question en ce qui les concerne étant extrêmement simple.

Le point de départ de la théorie est le théorème d'Euler, d'après lequel si λ désigne le nombre des nombres premiers avec d et plus petit que lui, et a un nombre premier avec d, $a^{\lambda} - 1$ est un multiple de d. Je rappellerai aussi quelques remarques bien connues.

Soit a^p la première puissance de a qui donne le résidu 1 par rapport à d. Si $p = \lambda$, les puissances successives de a donnent tous les résidus possibles c'est-à-dire tous les nombres premiers avec d et plus petits que lui, parmi lesquels figure le résidu d-1 ou -1. De plus, la puissance de a qui donnera ce résidu sera $a^{\frac{\lambda}{2}}$; car si a^k donne le résidu -1, il faudra que a^{2k} donne le résidu +1.

Si p est plus petit que λ , il sera un diviseur de λ et il pourra

arriver que $a^{\frac{p}{2}}$ donne le résidu — 1, mais cela n'est pas sûr. Dans tous les cas, il existe une puissance de a dont l'exposant est au plus égal à $\frac{\lambda}{2}$ qui donne le résidu \pm 1.

Theoreme. — Pour calculer le résidu d'un nombre par rapport à un diviseur d premier avec 16, on peut, par une seule addition, ou par une addition et une soustraction, réduire le nombre donné à avoir au plus $\frac{\lambda}{2}$ chiffres, λ désignant le nombre des nombres premiers avec d et plus petits que lui.

En effet, il existe une puissance de 10, 10 p qui donne le résidu 1. Il en sera de même de 10 kp et tout nombre de la forme de A10 kp sera congru avec A.

Donc, on partagera le nombre en tranches de p chiffres, et on ajoutera les tranches: on réitérera l'opération jusqu'à ce que le nombre ait au plus p chiffres.

Si p est impair, ou si 10^2 ne donne pas le résidu -1, la réduction sera terminée; mais on aura $p \leqslant \frac{\lambda}{2}$ d'après la remarque précédente.

Si $10^{\frac{p}{2}}$ donne le résidu -1. A \times $10^{\frac{p}{2}}$ sera congru avec -1. Donc : on partagera le nombre déjà réduit par la règle précédente en deux tranches de $\frac{p}{2}$ chissires et l'on retranchera la tranche de gauche de celle de droite.

Cette manière d'opérer en deux fois nous paraît plus rapide que la méthode employée souvent, qui consisterait à partager tout d'abord le nombre en tranches de $\frac{p}{2}$ chiffres, et à calculer l'excès de la somme des tranches de rang impair sur celle des tranches de rang pair. Il e-t clair que les deux règles conduisent au même résultat. Enfin, on sait que si la soustraction est impossible, on la rend possible en ajoutant au premier nombre ou en retranchant du second un multiple convenable du diviseur.

Dans certains cas, on peut pousser la réduction plus loin;

mais alors les règles présentent quelque chose d'arbitraire. Supposons que 10 k donne le résidu z. Alors, $A.10^k$ sera congru avec zA, et l'on pourra séparer k chiffres à droite du nombre, multiplier la partie qui est à gauche de la séparation par z, et ajouter le résultat à la partie qui est à droite. L'application répétée de cette règle réduira le nombre des chiffres à k. Il importe, pour la rapidité du calcul, de choisir un résidu z qui soit assez petit, et un nombre k voisin de la moitié du nombre des chiffres. On pourra ensuite recommencer avec un nombre k' < k, et un autre résidu z' et ainsi de suite, jusqu'à ce que le nombre soit assez ré luit pour qu'on trouve plus avantageux d'appliquer la règle résultant de la méthode indiquée dans le numéro de mars.

On sait que le calcul des résidus des puissances successives de 10 se fait en divisant par d l'unité suivie d'un nombre indéfini de zéros; mais il convient de remarquer qu'il suffit de s'arrêter dès qu'on a trouvé le reste d-1 qui correspond au résidu -1, ou le reste 1.

Comme exemple, considérons le diviseur 19. La division D (Journal, 1894, p. 76), qu'il conviendrait d'arrêter au reste 18, donne:

$$10^{2} = m.19 + 5,$$

 $10^{5} = m.19 + 3,$
 $10^{9} = m.19 - 1,$
 $10^{18} = m.19 + 1.$

d'où

On partagera donc le nombre en tranches de 18 chiffres et on ajoutera les tranches; puis on partagera le nombre restant en tranches de 9 chiffres et on retranchera la tranche de gauche de celle de droite. Dans le nombre de 9 chiffres ainsi formé, on séparera 5 chiffres à droite; on multipliera la partie de gauche par 3 et on l'ajoutera à la partie de droite. Dans le nombre de 4 chiffres ainsi trouvé, on multipliera les centaines par 5 pour ajouter le produit au nombre formé, par les dizaines et les unités. Enfin, le nombre n'ayant que 2 chiffres, on ajoutera aux unités la moitié du chiffre des dizaines (p. 57).

Voici la disposition du calcul sur l'exemple de la page 77. Je prends de suite le nombre réduit à 9 chiffres

A la quatrième ligne, on a supprimé les 19 centaines qui sont un multiple de 19. Le nombre est multiple de 19.

Prenons encore comme exemple le diviseur 43. Il suffira de calculer au plus 21 chiffres dans la division, mais on peut encore abréger, dès qu'on trouve un petit reste

Nous avons
$$10^7 = m.43 + 6$$

d'où $10^{14} = m.43 + 36 = m.43 - 7$
et $10^{21} = m.43 - 42 = m.43 + 1$.

Du reste, 10²¹ est la première puissance de 10 qui donne le résidu 1, car les puissances précédentes ne pourraient être que 10³ ou 10⁷ qui donnent les résidus 11 et 6.

On remarquera aussi que

et

$$10^9 = m.43 + 6.14 = m.43 + 84 = m.43 + 41 = m.43 - 2.$$

Je retiens seulement les résultats suivants

$$10^3 = m.43 + 11$$

 $10^9 = m.43 - 2$
 $10^{21} = m.43 + 1$

La dernière égalité montre qu'il faut partager le nombre en tranches de 21 chiffres et ajouter les tranches. Ensuite je séparerai 9 chiffres à droite et je retrancherai de la tranche de droite le double de celle de gauche. Je séparerai ensuite 3 chiffres et j'ajouterai à la tranche de droite 11 fois celle de gauche. Le nombre n'ayant que 3 chiffres, j'observe que 130 = m.43 + 1, ce qui conduit à ajouter aux unités le quotient des dizaines par 13. Voici la disposition des calculs pour un nombre réduit à 21 chiffres.

Le nombre réduit à 3 chiffres est 312:

$$31 = 13 \times 2 + 5$$

$$312 = m.43 + 2
+ 50
+ 2
- 54
- 43
- 11$$

Le reste de la division du nombre proposé par 43 est 11.

(A suivre.)

PROBLEME DU BILLARD CIRCULAIRE

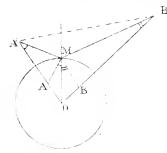
Par G. Tarry.

Quelle route doit suivre une bille A pour rencontrer une autre bille B, après avoir touché la bande d'un billard circulaire 0?

Il s'agit de trouver, sur la circonférence, un point M tel que l'augle AMO soit égal à l'augle OMB.

Soient A' et B' les réciproques (*) de A et B par rapport à la circonférence.

Les angles OA'M et MB'O sont égaux, comme étant respectivement égaux aux angles AMO et OMB. Par suite, le



lieu des points M est une hyperbole équilatère passant par le point O et dont le centre est au milieu de A'B'.

Les positions du point M seront les points d'intersection de cette hyperbole avec la circonférence donnée; il y aura quatre, trois ou deux solutions selon la position de la circon-

férence par rapport à la branche de l'hyperbole qui ne passe pas par son centre.

On doit remarquer que les solutions trouvées ne satisfont qu'à la condition suivante: La bille A est réfléchie par la bande circulaire suivant une droite qui passe par l'autre bille B: la bille ne pourrait donc pas toujours suivre matériellement le chemin qui lui est tracé, ainsi que l'a remarqué M. Auric (V. A. 1894, p. 218).

Mais si l'on admet qu'après sa réflexion la bille A peut

de A. par rapport à une circonférence, le point A' inverse de A, en prenant pour origine le centre du cercle, et pour puissance le carré du rayon du cercle.

Ainsi $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \overline{OM}^2$.

parcourir sa trajectoire rectiligue suivant l'une ou l'autre de ses deux directions, les solutions trouvées satisferont toujours à la question.

NOTE SUR LA QUESTION 549 (*)

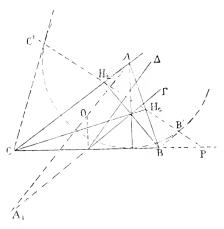
Par M. Dhavernas.

Rappelons d'abord l'énoucé de cette question :

Si, de l'orthocentre d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les bissectrices de l'angle A, la droite qui joint leurs pieds passe par le milieu de BC.

Soient Δ cette droite et Γ la droite joignant l'orthocentre au milieu de BC; la médiatrice correspondante à BC est parallèle à la hauteur AH_a ; elle est donc conjuguée harmonique de la médiane et des droites Δ et Γ . Comme d'ail-

leurs \Delta passe par le centre du cercle des neuf points, on vérifie ainsi la propriété bien connue que, sur la droite d'Euler, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, le centre du cercle des neuf points et l'orthocentre forment une division harmonique. La droite AO est parallèle à 1;



elle est donc divisée par les autres rayous du faisceau harmonique en deux parties égales; la droite Γ coupe alors le cercle circonscrit au point diamétralement opposé à A. Menons BB', CC' tangentes au cercle qui a A pour centre et AH_a

^(*) La question 549, identique à la question 536, a été résolue (V. Journal, 1894, p. 215).

pour rayon; B'C' coupe BC en P; la droite Γ est perpendiculaire sur AP; on voit en effet, en vertu d'un théorème énoncé dans le Journal (1893, p. 173), que B'C' passe par les pieds H_b, H_c des hauteurs. Dans le quadrilatère BCH_bH_c inscriptible, complété en A et P, la droite AP est alors la polaire de l'orthocentre; d'où il résulte que la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre en Q sur AP passe par le centre du cercle BCH_bH_c, autrement dit par le milieu de BC.

On peut remarquer en outre que si D est le pied de la bissectrice intérieure de l'angle A, les cercles BH_bD , CH_bD , PQD se coupent au point qui est la projection de l'orthocentre sur AD.

Le droite Γ jouit peut-être d'autres remarquables propriétés; il serait sans doute intéressant de les étudier.

EXERCICES DIVERS

Par Aug. Boutin

364. — On considère la suite récurrente

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \dots$$

dans laquelle

$$\mathbf{u}_n = p \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{u}_{n-2}.$$

Démontrer la formule

$$u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_n^2 = \frac{u_{n+1}u_n - u_1u_0}{p}$$
.

En géneral, si la loi de recurrence correspond à la formule

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2},$$

$$(q+1)(p+q-1)(p-q+1)\sum_{0}^{n}u_{2}^{n}$$

$$= 2pq(u_{n+1}u_n + pu_0 - u_1u_0) + (1-q)\left[u_{n+1}^2 + (p^2-1)u_0 - u_1^2 + q^2u_n\right]$$

Cette formule est en défaut quand un des trois facteurs du premier membre s'annule; en particulier pour q=-1, on trouve directement dans ce cas, la formule

$$(p^2 - 4) \sum_{0}^{n} u_n^2 = p u_{n+1} u_n - 2 u_n^2 + p u_1 u_0 (2n - 1) - 2n u_1^2 + (p^2 - 2n - 2) u_0^2.$$

Cette formule, si $u_0 = 0$, $u_0 = 1$, (cas qui se rencontrent fréquemment) est susceptible de la forme particulièrement simple

$$\sum_{n=0}^{n} u_n^2 = \frac{u_{2n+1} - u_{2n-1}}{p^2 - +}.$$

365. — Un triangulaire n'est jamais la somme de deux ou trois currés consecutifs.

- **366.** La somme des carrés de aeux triangulaires consécutifs est un triangulaire.
- **367**. Si les côtés d'un triangle rectangle sont des nombres entiers, le rayon du cercle inscrit, et les rayons de chacun des trois cercles ex-inscrits sont également des nombres entiers.
- **368.** Si les côtés d'un triangle sont donnés par les formules suivantes, où p et q désignent des entiers positifs de même parite;

$$a = \frac{1}{2} (q^{2} + 9p^{2}),$$

$$b = q^{2} + 3p^{2},$$

$$c = \frac{3}{2} (q^{2} + p^{2}),$$

vérifier les propriétés suivantes :

Les côtés sont des nombres entiers en progression arithmétique, les hauteurs et la surface sont également des nombres entiers

$$2S = 3pq(q^2 + 3p^2).$$

Le rayon du cercle inscrit est un nombre entier

$$r = pq$$
.

Le rayon du cercle exinscrit tangent au côté moyen est également un nombre entier, triple du précédent

$$r_b = 3pq$$
.

BACCALAURÉATS

Académie de Grenoble.

I. Enoncer les théorèmes relatifs aux limites entre lesquelles est toujours comprise la somme des faces d'un augle polyèdre convexe. En déduire les limites entre lesquelles est toujours comprise la somme des dièdres d'un angle trièdre.

II. Daus un triangle isoscèle ABC, on connaît la hauteur h et la médiane m relatives à un des côtés égaux du triangle. Calculer les

angles et les côtes de ce triangle.

1º Questions à chosir: (a) Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles; (b) centre des forces parallèles; (c) cent e de gravité.

2° On donne un cercle O de rayon R, «t une tangente AT en un point A du cercle On mène un rayon OB faisant un angle α avec OA et rencontrant en B la tangente AT. En B, on mène la perpendiculaire BC à OB jusqu'à sa rencontre en C avec OA. Sur OC comme diamètre.

on décrit un cercle. On demande : (a) la longueur de la corde DD' commune aux deux cercles; (b) de déterminer α de façon que cette corde soit égale à la corde BB' détachée par le cercle sur les tangentes.

On donne les traces d'un plan et les projections horizontales de trois points situés dans ce plan. On demande de déterminer les projections du centre du cercle qui passe par ces trois points.

Académie de Lille.

1° Questions à choisir: (a) Parmi toutes les droites que l'on peut mener dans un plan par le pied d'une droite oblique à ce plan, déterminer: l° celle qui fait avec l'oblique le plus petit angle; 2° celle qui fait avec l'oblique un angle droit.

(b) Indiquer, sans démonstration, la construction de la tangente à l'ellipse par un point extérieur. Appliquer cette construction au cas où l'ellipse devient une circonférence, el, dans ce cas, la justifier directement,

(c) Surface latérale du tronc de cône à bases paralleles.

2º Problème: Deux points A et B étant situés sur un même diamètre d'une circonférence de rayon R, à des distances a et b du centre, on suppose qu'un point M se déplace sur la circonference, et on demande comment varie l'angle AMB sous tequel la droite AB est vue du point M. — On distinguera les trois cas où les points A et B sont tous deux à l'intérieur du cercle, ou bien tous deux à l'extérieur, ou bien l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur.

Académie de Lyon.

Questions à choisir: (a) Démontrer les formules qui permettent de calculer les angles et la surface d'un triangle dont on conuaît les trois côtés. Conditions de possibilité; (b) Dans un triangle, on connaît les côtés a et b ainsi que l'angle A. Trouver le côté c ainsi que les angles B et C et la surface S. Examiner les différents cas qui peuvent se présenter et les discuter; (c) Trois points A, B, C, étant situés sur un terrain uni et rapportés sur une carte, déterminer sur cette carte le point M d'où les distances AB, AC sont vues sous des angles donnés p et q. Cas où le problème est indeterminé. Condition pour que le quadrilatère MABC soit inscriptible.

2º Problème. — Dans un angle obliquangle, on donne:

 $A = 27^{\circ}47'77'', \quad a = 2199^{\circ}, 12, \quad b = 2513^{\circ}, 28.$

On demande à calculer les différents systèmes de valeurs de c. B, C et la surface S qui conviennent à ces données.

Académie de Montpellier.

Un cône droit, à base circulaire, est supposé prolongé au delà de la base. Une sphère S passe par la circonférence de base et par le sommet du cône. On considère le volume V limité par la surface latérale du cône, et par la zone de la sphère S comprise à l'interi-ur de la surface conique prolongée. On demande de calculer le rayon de la base du cône, sa hauteur et le rayon de la sphère, sachant que le volume V est équivalent à celui d'une sphère donnée de rayon a, et que la surface de la zone qui limite ce volume est équivalente à la surface d'une autre sphère donnée de rayon b. Discuter le problème.

QUESTION 556

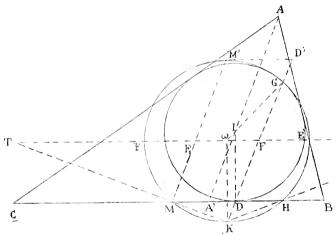
Solution par M. DAVIDOGLOU.

Dans un triangle ABC, on donne le cercle des neuf points (centre et rayon), le point de contact G de ce cercle et du cercle inscrit, ainsi que la direction du côté BC:

1º Lieu du point de contact D de BC et du cercle inscrit;

2º Construire le triangle en supposant que l'on donne aussi b-c; ou bien le rapport $\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{DM}}$, où H est le pied de la hauteur issue de A et M le milieu de BC. (Bernès.)

Soient ω le centre du cercle donné; ωK le rayon perpendiculaire à la direction donnée BC. Tirons GK. Comme cette



droite contient évidemment les points D du contact des cercles inscrits, elle représente le lieu cherché.

2º, α). Soit M le milieu du côté BC = a; on a:

$$MD = \frac{a}{2} = DB = \frac{a}{2} - (p - b) = \frac{b - c}{2}$$

De là cette construction:

Par le point ω , on mène le diamètre EE' perpendiculaire \mathbf{a} ωK et qui coupe GK en F; on prend de part et

d'autre de ce point $FF_1 = FF_2 = \frac{b-c}{2}$ (F_2 de même côté

que F par rapport à ω).

Prenons le point F_1 ; par ce point, on mène une parallèle à GK qui coupe le cercle ω aux points M et M' (M' de même côté que K par rapport au diamètre EE'); les perpendiculaires abaissées de ces points sur ω K coupent GK aux points de contact D et D' des deux cercles. Or, le point D' ne convient pas, car sa distance au diamètre EE' est plus grande que la distance du point G au même diamètre et par suite se trouve sur le prolongement de KG. Donc pour le point F_1 , on n'a qu'un seul point de contact.

Pour le point F2, par une construction analogue, on voit

que les points D, et D, sont acceptables.

Soient H, H_1 , H_2 les points où MD, M_1D_1 , M_2D_2 coupent le cercle des neuf points.

Sur MD, M_1D_1 , M_2D_2 on prend respectivement des points A', A'', A''' tels que:

$$\overline{\mathrm{MD}}^2 = \mathrm{MH.MA'}; \ \overline{\mathrm{M_1D_1^2}} = \mathrm{M_1H_1.M_1A''}; \ \overline{\mathrm{M_2D_2^2}} = \mathrm{M_2H_2.M_2A'''}.$$

Soient I, I_1 , I_2 les centres des cercles tangents respectivement en G et D, G et D_1 , G et D_2 à la perpendiculaire, en G, au rayon $G\omega$ et aux droites MD, M_1D_1 , M_2D_2 .

Les droites IA', I_1A'' , I_2A''' coupent respectivement en A, A_1 , A_2 les perpendiculaires élevées en H, H_1 , H_2 aux droites MD, M_1D_1 , M_2D_2 .

If ne reste plus qu'à mener des points A, A_1 , A_2 des tangentes aux cercles I, I_1 , I_2 .

Pour que les trois solutions existent, il faut que-

$$\mathrm{FF_2} < rac{\mathrm{R}}{2} - \mathrm{OF}.$$
 $\mathrm{OF} = \delta,$ $\mathrm{FF_2} = rac{b - \epsilon}{2},$

Posons et comme

cette condition s'écrit b-c < R-2 6.

Pour qu'on ait une seule solution, on doit avoir

$$FF_1 = \frac{R}{2} + \delta$$
 ou $R = 2\delta < b - c < R + 2\delta$.

2°, β). Les droites KM et KH coupent EE' en T et T_2 ; on a $\frac{T}{T_1F} = \frac{T\omega + \delta}{T\omega - \delta} = \frac{MD}{MH} = K$ (une quantité donnée). d'où $T\omega = \delta \cdot \frac{K + \tau}{K - \tau}.$

La construction s'achève facilement, comme dans le premier cas.

QUESTION 562

Solution par M. Davidoglou, élève au lycée de Berlad.

On donne un cercle et un carré qui lui est circonscrit, dont les côtés opposés sont A et A', B et B'. On joint le point de contact de A aux points où les côtés B et B' sont rencontrés par une tangente arbitraire T à la circonférence. Démontrer que ces droites interceptent sur A' un segment égal au côté du carré.

(Mannheim.)

Soient: ABCD le carré circonscrit au cercle O; A', B' C', D' les points de contact; EFE' la tangente arbitraire et enfin GG' le segment intercepté sur CD par les droites A'E et A'E'. Il s'agit de démontrer que

CD = GG', ou que CG = DG'.

Des triangles semblables donnent:

(1)
$$\frac{CG}{AA'} = \frac{CE}{2AA' + CE};$$

(2)
$$\frac{DG'}{AA'} = \frac{DE'}{2AA' - DE}.$$

L'angle EOE' étant droit, on a :

$$\overline{\mathrm{OF}^2} = \overline{\mathrm{AA'}^2} = \mathrm{EC'}.\mathrm{BE'}$$

= $[\mathrm{AA'} + \mathrm{CE}] [\mathrm{AA'} - \mathrm{DE'}];$

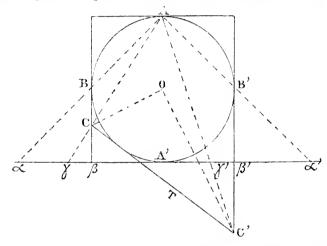
on en tire
$$CE = \frac{AA'.DE'}{AA'-DE'}.$$

L'égalité (1) devient

$$\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\mathrm{AA'}.\mathrm{DE'}}{\mathrm{2AA'}(\mathrm{AA'} - \mathrm{DE'}) + \mathrm{AA'}.\mathrm{DE'}} = \frac{\mathrm{DE'}}{\mathrm{2AA'} - \mathrm{DE'}} = \frac{\mathrm{DG'}}{\mathrm{AA'}}.$$

Donc
$$\frac{CG}{AA'} = \frac{DG'}{AA'}$$
 d'où $CG = DG'$.

Autrement (*). — Les droites AB, AB', les côtés B et B' du carré coupent le côté A' respectivement aux points α, α' β, β'. La tangente variable coupe les côtés B et B' aux points C et C' et les droites AC et AC' rencontrent A' en γ et γ'. L'angle COC' étant droit, les droites CO, C'O' décrivent, lors du déplacement de T, une involution circulaire et coupent par conséquent les côtés B et B' suivant des ponc-



tuelles C et C' projectives. Il en résulte immédiatement que leurs projections centrales γ et γ' sur A' sont aussi des couples de points correspondants de deux séries homographiques. Pour les positions A'. B, B' de T on a les couples de points

$$(\beta,\,\beta'),\;(\alpha,\,A'),\;\;(A'\,\alpha')\quad done\quad (\alpha\beta A'\gamma)=(A'\beta'\alpha'\gamma').$$

Mais $\alpha A' = \beta \beta' = A\alpha'$; les séries sont donc égales et par conséquent $\gamma \gamma' = \beta \beta' = \text{coté du carré}$.

Nota. — Solutions diverses par MM. Tzitzeica, E. Foucart et E.-N. Banistey.

^(*) Cette solution est de M. Droz-Farny.

OUESTION 564

Solution par A. Droz-Farny.

On considère une parabele P. En un point M, pris sur P, on trace la normale qui rencontre en A l'axe de P. Seit A la circonférence de centre A; de rayon AM. Par le fouer F. on mêne une tangente FB à \(\Delta \), la parallèle à l'axe, passant par B, rencontre P en C. Démontrer que BC est de grandeur constante. (G. L.).

Représentons par μ, β, γ respectivement les projections des points M, B et C sur l'axe. La sous-normale «A est égale au demi-paramètre p. On a donc:

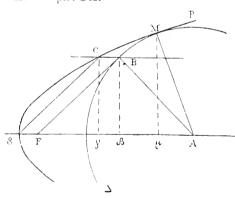
$$\overline{AM}^2 = \overline{M}\mu^2 + p^2 = 2p$$
. S $\mu + p^2$
= $2p\left(S\mu + \frac{p}{2}\right) = 2p$. FA
= $\overline{AB}^2 = \beta A$. FA.

Il en résulte que $\beta A = 20$.

Dans le triangle rectangle FBA, on a: $\overline{B\beta^2} = 2p.F\beta$; d'ailleurs.

$$\overline{\mathrm{C}_{\ell}}^2 = 2p.\mathrm{S}\gamma.$$
Donc $\mathrm{S}\gamma = \mathrm{F}\beta;$
Les triangles $\mathrm{S}\mathrm{C}\gamma$ et $\mathrm{F}\mathrm{B}\beta$ sont

Les triangles SCy et FBB sont donc égaux et la figure SFBC étant



 $BC = SF = \frac{p}{2}$ un parallélogramme,

Nota. — Solutions diverses par MM. Vazou, professeur au collège de Falaise; A. Davidoglou; G. Tzitzeica; E.-N. Barisien.

QUESTION 568

Solution par M. Jean Negretzu.

Résoudre l'équation :

$$2(x+\alpha-\beta-\gamma)(x+\beta-\gamma-\alpha)(x+\gamma-\alpha-\beta)+(x+\alpha-\beta-\gamma)(\beta-\gamma)^{2}\\+(x+\beta-\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha)^{2}+(x+\gamma-\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^{2}=0.$$
 (G. L.)

L'équation devient, en effectuant tous les calculs et en en simplifiant,

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0.$$

Les trois racines de cette équation sont α , β , γ , car on a $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$.

Autrement (*). - Considérons l'identité

(1)
$$8pqr + p(q-r)^2 + q(r-p)^2 + r(p-q)^2 \equiv (p+q)(q+r)(p+r).$$

Si l'on pose $q+r=2(x-x),$

$$p + r = 2(x - \beta),$$

 $p + q = 2(x - \gamma),$

d'où

$$p = x + \alpha - \beta - \gamma$$
, $q = x + \beta - \gamma - \alpha$, $r = x + \gamma - \alpha - \beta$, en remplaçant dans (1), on trouve

$$8(x + \alpha - \beta - \gamma)(x + \beta - \gamma - \alpha)(x + \gamma - \alpha - \beta) + 4(x + \alpha - \beta - \gamma)(\beta - \gamma)^{2} + 4(x + \beta - \gamma - \alpha)(\gamma - \alpha)^{2} + 4(x + \gamma - \alpha - \beta)(\alpha - \beta)^{2} = 8(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Les racines de l'équation proposée sont donc α, β, γ.

Remarque. — L'identité (1) peut s'écrire

$$p(q+r)^2 + q(p+r)^2 + r(p+q)^2 - 4pqr = (p+q)(q+r)(p+r).$$

Cette identité permet de résoudre les équations de la forme $(x+\alpha-\beta-\gamma)(x-\alpha)^2+(x+\beta-\gamma-\alpha)(x-\beta)^2+(x+\gamma-\alpha-\beta)(x-\gamma)^2-(x+\alpha-\beta-\gamma)(x+\beta-\gamma-\alpha)(x+\gamma-\alpha-\beta)=0$.

QUESTION 570

Solution par M. Vazou, professeur au collège de Falaise.

Soit P un point variable d'une ellipse de grand axe AA' et de foyers F, F'. Au point P correspond, sur le grand axe, un point

^(*) Cette solution est de M. Tzitzéica. Nons avons reçu une troisième solution de M. Dayidoglou.

I tel que A'I = F'P. La perpendiculaire élevée en I, sur l'axe, rencontre en M le diamètre OP. Le lieu du point M est une ellipse homothétique à la proposée. (Droz-Farny.)

Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée, de P, sur AA'; les triangles sem-

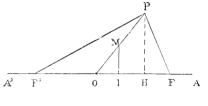
blables OIM, OHP,

donnent

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OI}} = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OH}},$$

or, on sait que

$$PF' = a + \frac{c}{a} OH,$$



par suite

OI = A'I -
$$a = \frac{c}{a}$$
 OH.
 $\frac{OM}{OP} = \frac{c}{a}$, etc...

Donc

M. Barisien, dans la solution qu'il nous adresse, observe que le point set le centre du cercle inscrit dans le triangle PFF'.

QUESTIONS PROPOSÉES

602. — L'expression $3600^n - 1600^n - 189^n + 84^n$ est divisible par 1895.

(Davidoglou.)

603. - Les deux relations

$$\frac{a_1}{1+b_1} + \frac{a_2}{1+b_2} + \dots + \frac{a_n}{1+b_n} = \frac{A}{1+B},$$

$$\frac{a_1(B-b_1)}{1+b_1} + \frac{a_2(B-b_2)}{1+b_2} + \dots + \frac{a_n(B-b_n)}{1+b_n} = 0,$$

entraînent la suivante

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A.$$
 (Vautré.)

604. — Du point où le cercle inscrit dans le triangle *abc* donné touche le côté *ab*, on élève une perpendiculaire à ce côté. Cette droite est rencontrée en α par la perpendiculaire élevée de *a* à *ac* et en β par la perpendiculaire élevée de *b* à *bc*. Démontrer que $\alpha\beta = \alpha\alpha - \beta\beta$. (Mannheim.)

605. — On donne un triangle abc. La perpendiculaire à ac, élevée du milieu de ce côté, coupe bc au point α . De même la perpendiculaire à bc, élevée du milieu de ce côté, coupe ac au point β .

Démontrer que a, β , α . b et le centre du cercle circonscrit à abc appartiennent à une même circonférence de cercle.

(Mannheim.)

606. — Par le milieu O de la bissectrice intérieure de l'angle A d'un triangle ABC, on mène une perpendiculaire à cette bissectrice. Cette perpendiculaire rencontre le côté AB en B' et le côté AC en C'. Montrer que, D étant le point de rencontre des droites CB' et C'B:

1º Le triangle CBD et le quadrilatère AB'DC' ont des

aires équivalentes;

2º La droite AD est la symédiane de l'angle A;

3° Si l'on a, entre les côtés du triangle ABC, la relation $\overline{BC}^2 = AB \times AC$,

le point st son centre des symédianes.

(E.-N. Barisien.)

607. - Démontrer géométriquement, que dans tout trian-

gle, on a $(b+c) \sin \frac{A}{2} = a \sin \left(\frac{A}{2} + B\right)$.

(E.-N. Barisien.)

608. — Montrer que l'élimination du paramètre t entre les deux équations

$$a(t^{6} + 1) - 3(x - a)t^{2}(t^{2} + 1) = 0,$$

$$t^{3}(x - a) + 3tx - 2y = 0,$$

conduit à l'équation

$$4(x^2 + y^2) - 5ax + a^2 = 0.$$

(E.-N. Barisien.)

609. — Dans tout triangle, le produit des trois médianes, divisé par le produit des symédianes, a pour expression

$$(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)(a^2 + b^2) : 8a^2b^2c^2.$$

(E.-N. Barisien.)

Le Directeur Gérant, G. DE LONGCHAMPS.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT

Par Mme Vve F. Prime.

(Suite, voir page 25.)

III. - Sur la théorie des projections.

A. — Les projections dans le plan.

- I. Définition du vecteur. Un segment quelconque AA_1 , de l'axe x_1x , peut être engendré par le mouvement d'un mobile allant de A vers A_1 . On convient de rappeler le sens de ce mouvement, en affectant la mesure de AA_1 du signe + ou du signe -, selon que le mobile se déplace de x_1 vers x ou de x vers x_1 . Et si l'axe x_1x est rectiligne, on donne au segment AA_1 , ainsi déterminé, le nom de vecteur; A est l'origine et A_1 , l'extrémité du vecteur.
- 2. **Théorème.** Si un mobile, partant du point A de l'axe x_1x , décrit successivement les vecteurs a_1 , a_2 ..., a_n , pour s'arrêter en A_n , le vecteur AA_n sera, en grandeur et en signe, la grandeur algébrique des vecteurs a_1 , a_2 ..., a_n .

Il suffit évidemment de considérer le cas de deux vecteurs a_1 , a_2 . Désignons, par a_3 , le vecteur AA_2 , il faut démontrer que $a_3 = a_1$, a_2 .

Cette formule est évidente lorsque l'axe des vecteurs a_1, a_2 est nul et aussi lorsqu'ils sont égaux et de signes contraires. Les seules hypothèses à examiner sont donc les suivantes

Dans chacun de ces six cas, le théorème est de vérification immédiate. Ainsi, dans le troisième cas, on observe que la distance AA_2 est comptée dans le sens négatif et que sa valeur absolue est $(-a_2) - a_1 = -(a_1 + a_2)$; on a donc $a_3 = a_1 + a_2$.

- 3. Corollaire. Lorsque la somme algébrique des vecteurs que parcourt le mobile est identiquement nulle, la position finale coïncide avec la position initiale; et réciproquement.
- 4. Remarque. Le théorème précédent et son corollaire sont encore applicables si l'axe x_1x est curviligne; ainsi ils sont vrais pour les arcs de circonférence définis en trigonométrie.
- 3. Définition de la projection d'un point sur un axe. Soit l'axe x_1x sur lequel on demande de projeter le point A. Imaginons que l'axe x_1x soit rencontré, par l'axe y_1y sous l'angle θ que nous supposons compris entre o et π . On sait que cet angle est celui dont il faut faire tourner x_1x , autour d'un de ses points et dans le sens admis comme sens positif, pour le rendre parallèle à l'axe y_1y .

La parallèle à y_1y_1 , menée par A, rencontre x au point a_i ; nous dirons que a_i est la projection d'angle b_i du point A sur l'axe x_1x_1 . La droite Aa s'appelle la projetante du point A.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, les projections sont dites orthogonales.

6. Projection d'un vecteur sur un axe. — La projection du vecteur AB sur l'axe x_1x est un second vecteur ab dont l'origine et l'extrémité sont respectivement la projection de l'origine et celle de l'extrémité du premier.

Nous indiquerons que le vecteur ab est la projection du vecteur AB sur l'axe x_1x , par la notation

$$\langle \overline{AB} \rangle x_1 x = \overline{ab},$$

que nous lirons: vecteur AB projeté sur x_1 r égale vecteur ab.

Sachant que
$$\overline{ab} + \overline{ba} = 0$$
, on a $(\overline{BA})x_1x = -\overline{AB})x_1x$.

7. **Théorème**. — $A_1A_2...A_n$ étant un polygone plan, concave ou convexe, si un mobile, partant de A_1 , y revient après avoir parcouru une seule fois les différents côtés du polygone, et si l'on considère chacun de ces côtés comme un vecteur ayant pour origine celui de ses sommets d'où part le mobile, la somme algébrique des projections des côtés du polygone sur un axe situé dans son plan est identiquement nulle.

Soient a_1 , a_2 ... a_n les projections des sommets A_1 , A_2 ... A_n sur l'axe a_1x . Les projections des vecteurs $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,... $\overline{A_{n-1}A_n}$ sont les vecteurs $\overline{a_1a_2}$, $\overline{a_2a_3}$,... $\overline{a_{n-1}a_n}$. Or en vertu du n° 3, on a identiquement $\overline{a_1a_2} + \overline{a_2a_3} + \ldots + \overline{a_{n-1}a_n} = 0$.

- 8. Corollaire. La projection d'un vecteur sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des éléments d'un contour polygonal ayant la même origine et la même extrémité que le vecteur.
- 9. **Théorème**. Les projections d'un vecteur sur deux axes parallèles et de même sens sont égales en grandeur et en signe.

Soient \overline{ab} , $\overline{\alpha\beta}$ les projections du vecteur \overline{AB} sur les axes x_1x , $\xi_1\xi$ parallèles et de même sens. La figure $a\alpha\beta b$ étant un parallélogramme, les projections ab $\alpha\beta$ sont égales en valeur absolue. Elles ont en outre le même signe; car, b étant sur le segment ax de l'axe x_1x , β doit être sur le segment $\alpha\xi$ de $\xi_1\xi$, sinon $b\beta$ et ax se couperaient.

10. **Théorème**. — Les projections sur un même axe de deux vecteurs égaux, parallèles et de même sens (*), sont égales en grandeur et en signe.

1º Soient \overline{AB} , $\overline{A_1B_1}$ les vecteurs considérés que nous supposerons d'abord appartenir à une même droite. Soit O le milieu des segments A_1B , AB_1 et a, b, a_1 , b_1 , o les projections des points A, B, A_1 , B_1 , O sur l'axe x_1x . En vertu d'un théorème connu, O est aussi le milieu des segments ab_1 , a_1b et il en résulte les deux égalités

$$\overline{ao} = \overline{ob_1},$$

$$\overline{ob} = \overline{a_1o}$$

d'où, par addition

$$(\overline{ao} + \overline{ob})$$
 ou $\overline{ab} = (\overline{a_1o} + \overline{ob_1})$ ou $\overline{a_1b_1}$.

 2° Supposons, en second lieu, que les vecteurs \overline{AB} , $\overline{A_1B_1}$ ne soient pas sur une même ligne droite. La figure $\overline{ABB_1A_1}$ est un parallélogramme, les droites A_1B , $\overline{AB_1}$ se coupent

^(*) On peut dire aussi, pour abréger le langage, équipolleuts.

mutuellement en parties égales, et si O est leur point de rencontre, on a

$$\overline{AO} = \overline{OB}_1$$
 et $\overline{OB} = \overline{A_1O}$.

Il en résulte, eu égard au nº 8 et au 1º de ce numéro, que $(\overline{AB})_x = (\overline{AO})_x + (\overline{OB})_x = (\overline{OB_1})_x + (\overline{A_1O})_x = (\overline{A_1B_1})_x$

11. Coefficient directeur. — Le coefficient directeur d'un axe Δ par rapport à des projections d'angle θ est la quantité λ définie par la relation

$$\lambda = r_x$$

sachant que r est un vecteur compté sur d et égal à l'unité positive.

Cette définition entraîne immédiatement ces conséquences:

1º Deux axes parallèles et de même seus ont le même coefficient directeur (nº 10).

2º Deux axes parallèles et de sens contraires ont des coefficients directeurs égaux et de signes contraires (nº 6).

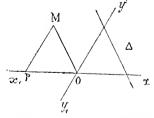
3º Si les projections sont orthogonales, \(\lambda\) est le cosinus de l'angle a que la direction de l'axe \(\Delta\) fait avec celle de \(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \).

12. Théorème. — Dans le cas de projections d'angle θ , $\lambda = \frac{\sin (\theta - \alpha)}{\sin \theta}.$

$$\lambda = \frac{\sin\left(\theta - \alpha\right)}{\sin\theta}.$$

Cette formule est évidente lorsque $\alpha = k\pi$ ou $0 + k\pi$, car elle donne $\lambda = \pm 1$ ou o.

Placons-nous en dehors de ces cas spéciaux; soient y_1y_2 la direction des projetantes et O le point où elle rencontre x_1x . Par O, menons OM parallèle à O et de même sens; si $\overline{\mathrm{OM}} = 1$, la projection $\overline{\mathrm{OP}}$ de $\overline{\mathrm{OM}}$ sur x_1x est le coefficient



λ de Δ. Quatre cas sont à considérer : a peut être compris entre O et θ , entre θ et π , entre π et $\pi + \theta$ et entre $\pi + \theta$ et 2π. Supposons, pour fixer les idées, $\theta < \alpha < \pi + \theta$; le triangle OPM donne

OP : sin OPM = OM : sin OPM.

Mais $OP = -\lambda$, $OM = \tau$, $OMP = \alpha - \theta = -(\theta - \alpha)$, et OPM = 6.

On a donc
$$-\lambda : \sin \{-(\theta - \alpha)\} = 1 : \sin \theta$$
, d'où $\lambda = \frac{\sin (\theta - \alpha)}{\sin \theta}$.

13. Théorème. -- \(\lambda\) étant le coefficient directeur de l'axe \(\Delta\) sur lequel le vecteur r est compté, on a $r_s = \lambda . r$.

Soient $\overline{AB} = r$, $\overline{ab} = r_x$; prenons, sur Δ , $\overline{AC} = 1$ et soit $(\overline{AC})_x = \overline{ac} = \lambda$.

Les droites Aa, Bb, Cc étant parallèles entre elles, on a

$$ab = \frac{ac}{AC} \cdot AB$$

 $|r_x| = |\lambda r|$.

d'où

Or, si r est positif, les points B, C sont du même côté du point A et il en est de même des points b, c par rapport à a; par suite, r_x et λ ou λr ont le même signe.

Si r est négatif, les points B.C sont de part et d'autre du point A; il en est de même des points b, c par rapport au point a, c'est-à-dire que r_x et λ ont des signes contraires et, par suite, r_x et λr ont le même signe.

 $r_{\tau} = \lambda r_{\bullet}$ On a donc toujours

14. Théorème de Laisant. — Si l'on a les deux identités

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} r_{i} \cos z_{i} = 0,$$
et
$$\sum_{i=1}^{n} r_{i} \cos (z_{i} + p) = 0,$$
avec la condition
$$p \neq k\pi,$$

avec la condition l'on aura aussi

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \cos(a_i + q) = 0,$$

q étant une quantité quelconque.

Prenons un axe quelconque et construisons le contour polygonal $\Lambda_0 A_1 \ldots A_n$ dont les éléments $\overline{A_0 A_1}, \overline{A_1 A_2}, \ldots \overline{A_{n-1} A_n}$ sont respectivement définis par les quantités $(r_1, \alpha_1), (r_2, \alpha_2)$... (r_n, z_n) . Supposons que, pour former ce contour, nous

devions introduire le vecteur $r_{n+1} = A_n A_0$ faisant avec $x_1 x$ l'angle α_{n+1} .

Si nous faisons tourner l'axe x_1x , autour d'un de ses points, de l'angle -p, les angles α_1 , α_2 ... deviennent $\alpha_1 + \beta$, $\alpha_2 + \beta$, ... Soit $\xi_1 \xi$ la nouvelle position de l'axe x_1x .

Projetons orthogonalement le polygone $A_0A_1...A_n$, d'abord sur x_1x , puis sur z_1z . On obtient les deux identités

$$(1') \qquad \sum_{i=1}^{n+1} r_i \cos \alpha_i \equiv 0,$$

et

(2')
$$\sum_{i=1}^{n+1} r_i \cos(z_i + p) \equiv 0.$$

Retranchons (1) de (1') et (2) de (2') et nous aurons r_{n-1} , cos $\alpha_{n+1} = 0$,

avec $r_{n-1}. \cos (\alpha_{n+1} + p) = 0.$

Or, l'angle p étant différent de $k\pi$, on ne peut pas avoir à la fois

 $\cos \alpha_{n-1} \equiv \cos (\alpha_{n-1} + \rho) \equiv 0$,

c'est donc que $r_{n+1} = 0$. Mais alors A_n coïncide avec A_m et le contour polygonal $A_0 \ldots A_n$ est fermé. Faisons tourner x_1x de l'angle -q et projetons orthogonalement le contour $A_0 \ldots A_n$ sur la nouvelle position de l'axe; nous obtenons ainsi l'identité

$$\sum_{i=1}^{n+1} r_i \cos(\alpha_i + q) \equiv 0.$$
(A suivre.)

DEMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

DE L'INÉGALITÉ $x - \sin x < \frac{x^3}{4}$

Par M. Maurice Fouché, professeur de mathématiques élémentaires à Sainte-Barbe.

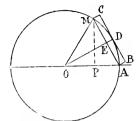
La démonstration qu'on donne habituellement de l'inégalité

$$x - \sin x < \frac{x^3}{4}$$

présente un caractère artificiel qui la rend assez difficile à

retenir, au moins par les commençants. Le raisonnement suivant ne me paraît pas présenter cet inconvénient; du moins, au même degré.

Si on désigne par x l'arc AM, l'expression $x - \sin x$ représente le double de l'aire du segment compris entre l'arc et la corde, laquelle



est plus petite que celle du rectangle AMCB compris entre la corde et la tangente parallèle CB. On aura done:

$$x - \sin x < 2AM \cdot ED = 4 \sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2} \right)$$
$$= 8 \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4},$$
et a fortiori:
$$x - \sin x < 8 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{16} = \frac{x^3}{4}.$$

PROPRIÉTÉS DU CARRÉ MAGIQUE DE 3

Par M. G. Tarry.

Considérons trois carrés de trois cases de côté.

Dans les cases du premier carré plaçons les neuf premiers nombres entiers suivant l'ordre d'un carré magique.

Dans les cases du deuxième carré, plaçons ces nombres à la suite les uns des autres dans leur ordre naturel, en partant d'une case quelconque et en suivant les directions des lignes et des colonnes.

Dans les cases du troisième carré, portons les nombres égaux à la somme des deux nombres inscrits dans les cases correspondantes des deux autres carrés.

La somme des carrés des nombres du troisième carré est constante.

De plus, si les nombres du deuxième carré ont été placés en partant d'un coin, la somme des cubes du troisième carré est aussi constante.

EXEMPLES

Premier car r é.			Deuxi	ème	carrė.	Trois	Troisième carré.				
2	9	4	7	8	9	14	72	36			
7	5	3	I	2	3	7	ΙO	9			
6	I	8	4	5	6	24	5	48			
2	9	+	2	I	3	4	9	I 2			
7	5	3	5	-1	6	35	20	ı 8			
6	1	8	8	7	9	48	7	72			
2	9	4	6	4	5	I 2	36	20			
7	5	3	3	I	2	2 [5	6			
6	I	8	9	7	8	54	7	64			

La somme des neuf nombres du troisième carré est toujours égale à

$$225 = 5 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9).$$

Les nombres du troisième carré sont les produits des nombres correspondants des deux premiers carrés. Donc si, au lieu du produit, on avait pris la somme, la somme des carrés des nombres du troisième carré aurait été

$$2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 225)$$

Écrivons le carré magique sous la forme

$$5 - p$$
 $5 + p + q$ $5 - q$
 $5 + p - q$ 5 $5 + q - p$
 $5 + q$ $5 - p - q$ $5 + p$

Sous cette forme, il sera facile de vérifier la propriété relative à la somme des produits des nombres correspondants, et par conséquent celle des carrés.

Le développement fait voir en outre que

$$\begin{array}{ll} 4^{\circ} & 1^{2}(5-p) + 2^{2}(5+p+q) + 3^{2}(5-q) + 4^{2}(5+p-q) \\ & + 5^{2}.5 + 6^{2}(5+q-p) + 7^{2}(5+q) + 8^{2}(5-p-q) + 9^{2}(5+p) \end{array}$$

est une quantité indépendante des valeurs de $\,p$ et $\,q$.

2°
$$(5-p)^2 + 2(5+p+q)^2 + 3(5-q)^2 + 4(5+p-q)^2 + 5.5^2 + 6(5+q-p)^2 + 7(5+q)^2 + 8(5-p-q)^2 + 9(5+p)$$

est égal à $30(p^2+q^2) + \text{constante},$

Or
$$p^2 + q^2$$
 est égal à $(\pm 1)^2 + (\pm 3)^2$.

Cette dernière quantité est donc aussi constante. Ce qui démontre la propriété relative aux cubes.

SUR LES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

Par M. Maurice Fouché, professeur à Sainte-Barbe.

(Suite et fin, voir page 35.)

Un caractère de divisibilité peut ainsi être défini par les nombres suivants:

1º Nombre p des chiffres des tranches dans lesquelles on décompose le nombre; c'est le plus petit nombre p tel que $10^p = md + 1$:

2º Nombre $\frac{p}{2}$ qui indique la subdivision du nombre réduit en deux nouvelles tranches égales et la soustraction de la tranche de gauche de celle de droite, mais dans le cas seule-

 $10^{\frac{p}{2}} = ml - 1$

 3° Groupes des nombres k et α tels que

$$10^k = md + \alpha$$

en choisissant les plus convenables;

ment où

4º Diviseur n des dizaines tel que

$$10n = md \pm 1$$
.

En partant de ces principes nous avons construit le tableau suivant qui donne les caractères de divisibilité de tous les nombres premiers avec 10 jusqu'à 121, et de quelques autres plus grands. Pour expliquer l'usage de ce tableau, il nous suffira de formuler la règle générale suivante qui découle immédiatement des considérations précédentes.

1º Partager le nombre en tranches de p chiffres et ajouter les tranches :

 $2^{
m o}$ Subdiviser le nombre ainsi obtenu en deux tranches de $rac{
m p}{2}$ chi/fres

et retrancher la tranche de gauche de celle de droite. — On ne fera pas cette opération pour les diviseurs où la colonne $\frac{p}{2}$ resteru vide;

3º Séparer k chiffres à droite, multiplier la partie de gauche par α et ajouter le produit, pris avec son signe à la partie de droite; recommencer autant de fois que possible avec les mêmes nombres k et α , puis avec d'autres nombres k', α' , s'il y en a plusieurs groupes dans le tableau.

4º Diviser les dizaines du nombre réduit par le diviseur des dizaines n et ajouter le quotient au nombre formé par le reste de cette division suivi du chiffre des unités. On retranchera le quotient au lieu de l'ajouter quand le diviseur n sera précédé du signe —.

TABLEAU DES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ de tous les nombres premiers avec 10 jusqu'à 121.

d	p	$\frac{p}{2}$	k	α	n		d	p	$\frac{p}{2}$	k	α	n
3	1))))	»))		31	15))	6	2	-3
7	6	3	2	2	-2))))	
9	1	»	»	,,	»		33	2	»	2	7	10
11	2	1	>>	,,))		37	3	»))	>>	-11
13	6	3))	3)	4		39	6	»	δ	4	
17	16	8	4	4						3	-14	4
			2	-2	-5		41	5	»	4	-4	-4
19	18	9	5	3			43	21	w)	9	-2	
1			2	5	2					3	11	13
21	12))	5	-2			47	46	23	14	4	
			4	4	-2		1			7	-2	
23	22	11	6	6						4	-11	-15
			3	11	7		49	21	»	4	4	
27	4	»	»))	-5					2	2	5
2 9	28	14	8	-4	ĺ		51	16	»	8	16	ļ
			4	-5	3					4	4	İ
1 1	1	1			1	ĺ			[2	-2	-5

d	p	$\frac{p}{2}$	k	α	n	$\mid d \mid$	p	$\frac{p}{2}$	k	2.	n
53	13	»	6	-4		89	22	»	14	-2	
			3	-7					9	5	
		Ì	2	-6	16				6	-4	
57	56	28	16	4					2	11	9
			11	5		91	6	3	2	9	-9
			8	-2	-17	93	15	>>	7	11	}
59	58	29	21	-4					2	7	28
			12	22		97	96	48	28	-4	l
			6	9		1			14	5	
			3	-3	6				4	9	
61	60	30	15	-11					2	3	-29
		i	12	-3		99	2))	»))))
			5	21		101	4	2))	>>	1)
			3	24	-6	103	34	17	12	8	
63	6))	3	-8	19				4	9	
67	14	7	5	2					5	-3	31
			3	-5	-20	107	53))	21	-2	
69	22	n	16	4					7	101	
			4	-5	7				3	-7	-32
71	35	»	23	1		109	108	54	28	3	
			17	8					16	5	
			9	3					8	21	
			3	6	-7				3	19	41
73	8	4))	>>	22	111	3	»	**))))
77	6	3))))	-23	113	112	56	22	4.1	
79	13	»	7	×2					16	-7	
			2	21	8				ŏ	-5	34
81	9	»	6	53		117	6	9)	4	55	-35
			2	19	-8	119	48	n	23	5	
83	41	»	22	-2				İ	15	22	
			12	7					4	4	12
			4	4	25	121	22	11	3	32	11
87	28	»	20	7							
			11	31						1	
			4	-5	-26			İ	l		

QUELQUES AUTRES DIVISEURS

[271]	5	»	» l	»]	27	[33 3 33]	1 5	»]	к	» l	» l
333	3))	»	»))	99999	5	10))	,,	>>
999	3	>>	>>	»))	A (*)					
1001	8	4))))))		6	ъ))))))
1111	4))	»))))	499	»))	3	2	50
3333	4	»	»))))	501	α))	3	-2 -	50
9999	4))	n))))	167))))	3	-2 -	-50
11111	3	»	»))))						

Il est bien clair qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser tous les caractères indiqués pour chaque diviseur. Dans bien des cas, par exemple, pour les diviseurs 91, 97, 103. le dividende pouvant être réduit à deux chiffres, il sera inutile d'appliquer le caractère qui consiste à diviser les dizaines par n; mais on peut préférer pousser la réduction moins loin et appliquer ce caractère par division des dizaines.

Il peut être utile aussi d'observer qu'on peut arriver à trouver le reste par l'application d'un seul caractère. Soit par exemple le diviseur 97 qui admet le caractère k=2, $\alpha=3$, ce qui veut dire qu'on ne change pas le reste en ajoutant au nombre formé par les dizaines et les unités le triple des centaines. On déduit aisément de cette proposition la règle suivante:

Pour trouver le reste de la division d'un nombre par 97, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre. On multiplie la première tranche à gauche par 3 et on l'ajoute à la suivante; si la somme a plus de deux chiffres, on multiplie le chiffre des centaines par 3 et on l'ajoute au nombre formé par les deux autres chiffres, et ainsi de snite jusqu'à ce que le résultat n'ait que deux chiffres. On multiplie ce résultat par 3

^(*) A désigne un quelconque des diviseurs de $3^3.7.11.13.37 = 999999$

Remarques. — 1° Il est bien clair que quand le diviseur des dizaines est 20, 30, 50, etc., il suffit de diviser les centaines par 2, 3, 5, etc.;

 $^{2^{}o}$ Pour le diviseur 103, le caractère qui consiste à diviser les dizaines par 31 devient inutile, si on s'est servi de k=2. $\alpha=-3$, puisqu'alors le nombre n'a plus que deux chiffres.

et on l'ajoute à la tranche suivante, puis on continue de la même manière, en opérant sur les tranches successives, de gauche à droite, jusqu'à ce qu'on trouve un nombre de deux chissres.

Voici le type du calcul pour le nombre

Le reste est 54.

On pourra de même, par l'examen du tableau précédent, trouver un grand nombre de régles analogues.

Comme dernier exemple, je vais chercher le reste de la division du nombre précédent par 167. Il résulte du tableau qu'il faut partager le nombre en tranches de trois chiffres, multiplier chaque tranche par — 2, en commençant par la gauche, et ajouter le résultat à la tranche suivante:

Le reste est 70.

Cas d'un diviseur non premier avec 10.

Un pareil diviseur sera de la forme d=d' 2° 5°, d' étant premier avec 10. Soit γ le plus grand des deux nombres α et β . A la droite du nombre proposé N nous séparerons γ chisfres, de manière à l'écrire

$$A = P.10^{\gamma} + Q;$$

puis, nous chercherons le reste de la division de P par d' par l'application des caractères connus, puisque d' est premier avec 10.

Soit
$$P = m \cdot d' + r$$
.
On aura $A = m \cdot d' \cdot 10^7 + r \cdot 10^7 + Q$.

Mais $d'.10^{\gamma}$ est un multiple de d, et le reste est le même que celui de $r.10^{\gamma} + \alpha$, c'est-à-dire qu'à la droite du résidu correspondant au module d', on écrira les γ chiffres du nombre proposé qui n'ont pas servi, et c'est le nombre ainsi formé qu'on divisera par d.

L'application de ce raisonnement au diviseur $52 = 13 \times 4$ conduit à la règle suivante complétée par cette remarque que 100 = m.52 - 4.

Pour trouver le reste de la division d'un nombre par 52, on isole deux chiffres à la droite de ce nombre, et on partage les chiffres restant en tranches de 6 chiffres de gauche à droite, la dernière tranche à gauche pouvant avoir moins de 6 chiffres. On ajoute toutes ces tranches, non compris les 2 chiffres isoles à droite, et on recommence jusqu'à ce que le nombre ait 8 chisfres au plus. Alors laissant toujours les 2 chiffres de droite isolés, on partage les 6 autres en deux tranches de trois chiffres, et on retranche celle de gauche et celle de droite, en ajoutant à celle-ci, si c'est nécessaire, un multiple de 130. Le nombre ainsi réduit a au plus 5 chiffres; on le partage en tranches de 2 chiffres de gauche à droite, la 3e tranche n'ayant qu'un chiffre; puis, commençant par la gauche, on multiplie la première tranche par - 4 et on ajoute le résultat à la suivante: on multiplie la somme par -4 et on l'ajoute à la tranche suivante, et ainsi de suite jusqu'à ce que le nombre n'ait plus que deux chiffres. Si le résultat ainsi obtenu est plus petit que 52, c'est le reste, sinon on en retranche 52 unités et on trouve le reste.

Exemple:

$$84.567898.765483.127684.37765483.567898$$

$$84.567898.765483.127684.37$$

$$84.567898.765483.127684.37$$

$$84.567898.765483.127684.37$$

$$\frac{84}{1.461.150}$$

$$\frac{1}{461.150}$$

$$\frac{520}{670}$$

$$\frac{-461}{2.09.37}$$

$$\frac{-8}{+1}$$

$$\frac{-4}{33}$$

Le reste est 33.

A l'aide du tableau précédent, on formera de même un très grand nombre de caractères de divisibilité conduisant à des calculs notablement plus simples que ceux que donnerait la simple division par les diviseurs.

EXERCICES DIVERS

Par Aug. Boutin

369. — On ne saurait trouver:

27.28.29.30.31.32.34.35.37.38 39.40.41.42.43.4.445 ou 46 entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.

(Voir J. M. E., année 1893, p. 274, Ex. 298.)

370. — Trouver 26 entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.

On estamené à résoudre en nombres entiers l'équation $26k^2 - 225r^2 = y^2$,

qui admet une infinité de solutions; il en est donc de même de la question proposée, en particulier pour r=1

pour r = 5 $25^{2} + 26^{2} + 27^{2} + \dots + 50^{2} = 195^{2},$ $62^{2} + 67^{2} + 72^{2} + \dots + 137^{2} = 663^{2}.$

371. — Trouver 33 nombres entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.

On est conduit à l'équation :

 $11k^2 = 272r^2 + 3y^2$

qui admet une infinité de solutions entières, il en est donc de même du problème proposé. En particulier, pour r=1

 $7^{2} + 8^{2} + 9^{2} + \dots + 39^{2} = 143^{2},$ $27^{2} + 28^{2} + 29^{2} + \dots + 59^{2} = 253^{2},$ $227^{2} + 228^{2} + 229^{2} + \dots + 259^{2} = 1397^{2}.$

372. — Trouver 36 entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.

6r désignant la raison de la progression, on est amené à résoudre en nombres entiers l'équation $k^2 = 3885r^2 + u^2$

qui admet une infinité de solutions; il en est donc de même de la question proposée. En particulier pour r = 1, on a $17^2 + 23^2 + 29^2 + \dots + 227^2 = 822^2.$

373. — On ne saurait trouver ni 4, ni 6 triangulaires consécutifs dont la somme soit un triangulaire.

374. — Trouver trois triangulaires consécutifs dont la somme soit un triangulaire.

Soit x le rang du plus petit, on a à résoudre en nombres entiers l'équation :

 $3x^{2} + 9x + 8 - K(K + 1) = 0.$ On trouve 2x = y - 3, 2K = 3z - 1,

y et z étant déterminés par l'équation $y^2 = 3z^2 - 2$.

Cette équation ayant une infinité de solutions, il en est de même du problème proposé.

La relation (1) est complètement résolue par les suites :

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 5, \quad y_2 = 19 \dots y_n = 4y_{n-1} - y_{n-2},$$

$$z_0 = 1, \quad z_1 = 3, \quad z_2 = 11 \dots z_n = 4z_{n-1} - z_{n-2},$$

$$d'où \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 34, \quad x_4 = 131 \dots$$

$$x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2} + 3.$$

375. — Trouver cinq triangulaires consécutifs dont la somme soit un triangulaire.

On est conduit à résoudre en nombres entiers :

$$5y^2 + 36 = z^2$$
.

qui admet une infinité de solutions; il en est donc de même de la question proposée. Cette équation est complètement résolue par les suites

$$y_0 = 0,$$
 $y_1 = 3,$ $y_2 = 0 \dots y_n = 3y_{n-1} - y_{n-2},$ $z_0 = 6,$ $z_1 = 9,$ $z_2 = z_1 \dots z_n = 3z_{n-1} - z_{n-2}.$

Si x est le rang du plus petit des triangulaires cherchés, on a

2x = y - 5. On obtient toutes les solutions par la suite :

$$x_1 = 2$$
, $x_2 = \frac{10}{2}$, $x_3 = 20$, $x_4 = 80$...
 $x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2} + \frac{5}{2}$,

en rejetant les valeurs de x dont l'indice est de la forme 3m-1, valeurs qui ne sont pas entières.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Esquirol, professeur au lycée de Montpellier.

A propos de la question soulevée (*) par l'établissement géométrique de la formule

(1)
$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{tg} \frac{A + B}{2}.$$

que l'on rencontre dans le deuxième cas de résolution des

^(*) Voir Journal, page 15.

triangles quelconques, est-il contraire à l'esprit du programme de seconde moderne de faire reposer la formule (1) sur la démonstration géométrique des formules qui transforment en produit $\sin A \pm \sin B$?

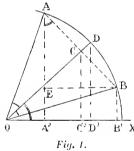
Si cela était permis, on arriverait à la formule (1) par le calcul classique, après avoir établi géométriquement les formules

(2)
$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

(3)
$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A - B}{2} \cdot \cos \frac{A + B}{2}$$

Or, ceci est facile.

Supposons que A et B désignent deux angles d'un triaugle; soit B < A, et représentons: A par l'angle XOA; B, par XOB. Si $A < 90^{\circ}$, on a la figure 1; si $A > 90^{\circ}$, on a la figure 2, car $\frac{A+B}{3} < 90^{\circ}$.



A' O C D'

 \mathbf{B}^{2}

Soit OD la bissectrice de BOA. Coupons les côtés par un arc de cercle de centre O et de rayon 1, puis traçons: BE, parallèle à XO; AA', BB', CC', DD', perpendiculaires sur OX. On a

$$\widehat{AOD} = \widehat{BOD} = \frac{A - B}{2}, \quad \widehat{XOD} = \frac{A + B}{2},$$

$$CC' = \frac{1}{2} (AA' + BB'), AE = AA' - BB'.$$

1º Les triangles OCC', ODD' semblables donnent CC' OC

$$\frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{DD'}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}},$$

d'où $CC' = OC \times DD'$, puisque OD = 1.

Donc AA' + BB' = 2.OC.DD'; et, en remplaçant chaque longueur par la ligne trigonométrique qu'elle représente,

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \cos \frac{A - B}{2} \cdot \sin \frac{A + B}{2};$$

c'est la formule (2);

2º Les triangles BAE, ODD' semblables donnent

$$\frac{AE}{AB} = \frac{OD'}{OD}$$
,

ou (puisque AB = 2AC, OD = 1)

$$AE = 2AC.OD'.$$

Finalement

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A - B}{2} \cdot \cos \frac{A + B}{2}$$
;

c'est la formule (3).

En adoptant cette voie, les élèves de seconde moderne pourraient utiliser les formules (2) et (3), ainsi que les formules analogues en $\cos A \pm \cos B$, $(gA \pm tgB)$ qu'on en déduit facilement, sans avoir recours aux formules de l'addition des arcs.

BACCALAURÉATS

Académie de Nancy.

1° Questions à choisir: (a) Démontrer que tout déplacement d'une figure plane de forme invariable, dans son plan, se ramène à une rotation ou a une translation; (b) On prolonge les arêtes d'un angle trièdre quelconque au delà de son sommet. Montrer que le nouvel angle trièdre ainsi obtenu ne peut, en général, lui être superposé. Trouver les conditions pour que les deux trièdres soient superposables; (c) Démontrer que deux figures symétriques par rapport à une droite sont superposables, et que les symétriques d'une même figure par rapport à un plan et par rapport à un point de ce plan sont deux figures superposables

 2° Problème. — On donne deux circonférences extérieures de centres O et O' et de rayons R et R', la distance des centres étant OO' = a. Par le centre O de l'une, on mêne une droite OA faisant avec OO' un angle x = AOO', et du centre O' de l'autre, on abaisse O'A perpendiculaire sur OA. Soient respectivement B et B' les points où les droites OA, O'A rencontrent les circonférences O et O', on joint BB' et on considère le quadrilatère BB'O'O.

(a) A quelle équation doit satisfaire l'angle x pour que le quadrilatère soit inscriptible?

(b) Déterminer l'angle x de manière que le quadrilatère ait une surface donnée. Discuter, Maximum de la surface.

Académie de Poitiers.

1' Questions à choisir : (a) Théorie du plus grand commun diviseur de deux nombres (par les divisions successives); (b) Erreur relative d'un produit et d'un quotient; (c) Définition et extraction de la racine carrée

d'un nombre entier cu fractionnaire à 1/10ⁿ près.

2º Problème. — Deux triangles équilatéraux ABC, A'BC ont un côté commun BC et leurs plans font entre eux un angle x. Exprimer, en fonction de x et du côté a de ces triangles, le volume du tétraèdre ABCA'. Variation de ce volume. Valeurs de sin x et cos x, lorsque le tétraédre est régulier.

Académie de Rennes.

1º Questions à choisir : (a Etudier depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=+\infty$ la fonction

 $y = a (x - \alpha) + \frac{b}{x - \beta}$

où a, b, α, β , sont des constantes. Discontinuités, maximum et minimum (b) Montrer que le trinôme $y=ax^4+bx^2+c$ ne peut avoir un diviseur réel du premier degré en x sans en avoir un second. Conditions pour que ce trinôme admette ainsi deux diviseurs du premier degré, réels, et deux seulement; conditions pour qu'il en ait quatre. Discussions des valeurs de ce polynôme dans ces deux cas, en supposant x variable de $-\infty$ à $+\infty$; (c) Intérêts composés. Valeur de l'annuité qui, à un taux connu, éteindra, après n versements un capital donné. Que deviendra la formule si le nombre des versements est illimité?

2º Problème. — On donne un point C à la distance c du centre O d'une circonférence de rayon α , et l'on prend sur cette circonférence un point M dont le rayon OM fait avec OC l'angle $COM = \alpha$. La sécante CM coupe la circonférence en un second point M'; $(a^{\dagger}$ Calculer, en fonction de α . le diamètre de la circonférence qui passe en O, M, M', et en trouver les maxima ou minima quand α varie; (b) Déterminer le point C' où cette circonférence variable coupe OC: que devient ce point quand α varie? (c) Evaluer CM, C'M et leur rapport; (d) Prouver que le produit

C'M, C'M' a une valeur indépendante de a.

Académie de Toulouse.

1º On donne, dans un plan Q, deux points A et B dont on désigne la distance par a, et on mène dans ce plan le cercle ayant AB pour diamètre. Au point B, on élève une droite BS de longueur h, perpendiculaire au point Q. On propose de meuer par le point A une corde AM de la circonférence, telle que l'aire du triangle SAM soit égale à une quantité donnée qu'on désignera par $\frac{1}{2}$ at.

2º Calculer, à un millimètre près, le côté d'un triangle équilatéral dont

l'aire est égale à un mètre carré.

1º Trouver le premier terme et la raison d'une progression géométrique, connaissant la somme t du premier et du cinquième termes, et la somme kt du second et du quatrième. K et t sont des nombres donnés. Discussion.

2º Un promeneur se trouve sur une falaise à 80 mètres au-dessus du niveau de la mer. Quelle est, à un kilomètre près, la distance à laquelle il peut voir en mer?

NÉCROLOGIE

Les sciences et l'Italie viennent de faire une grande perte en la personne du Père Francisco Denza, barnabite, l'un des plus savants astronomes du xixe siècle, Président de l'Académic pontificale des Nuovi Lincei, Directeur de l'observatoire du Collège romain. Ses études sur les étoiles filantes sont connues dans tous les pays du monde où l'on s'occupe des phénomènes célestes. Citons parmi ses principaux ouvrages:

Les étoiles filantes de novembre 1868 et août 1869 observées en Piémont et dans d'autres contrées d'Italie. — Observations des météores. — Rapports sur les observations des éclipses. — Le commodore Maury et la correspondance météorologique des Alpes et des Apennins. — Etudes sur la climatologie de la vallée d'Aoste. — Les étoiles filantes d'août 1885. — Taches solaires, perturbations magnétiques et aurores polaires.

L'unité des forces physiques, publiée à Milan par le P. Angelo Secchi, en 1885, est précédée d'une remarquable esquisse biographique du savant jésuite par le P. Deuza. Dans la séance de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei du 21 janvier de cette année, le P. Denza, président, donnait encore lecture à ses collègues d'une dernière Note sur les taches solaires observée: en 1893.

Aristide Manne, Correspondant de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei.

Vaucresson, le 21 décembre 1894.

A PROPOS DE LA QUESTION 562 (*)

M. Mannheim, qui a proposé cette question, nous fait observer que la solution est aussi simple lorsqu'on prend l'énoncé suivant:

Nous prions, à ce propos, et de nouveau, nos collaborateurs de vouloir bien presser l'envoi de leurs solutions. Elles ne resteront pas longtemps dans nos cartons.

G. L.

^(*) Voyez la solution publiée dans le numéro de février, p. 43. Depuis l'apparition de ce numéro, nous avons reçu une solution de M. Aletrop, à Madrid, de cette intéressante question.

On donne un cercle et un trapèze qui lui est circonscrit. Les points de contact des côtés sont a,b,c,d en commençant par le point de contact d'un des côtés parallèles. Au point arbitraire t du cercle, on mêne une tangente qui coupe en m, n, les côtés tangents en b,d: les droites am, an interceptent sur le côté tangent en c un segment de grandeur constante, lorsque t varie de position sur le cercle.

Menons le diamètre parallèle aux côtés du trapèze tangents en a et c. Appelons b', m', t'. n', d' les points de rencontre de ce diamètre et des droites ab, am, at, an, ad. On sait que b'm' = m't', t'n' = n'd'. Il résulte de là que m'n' est la moitié de b'd', c'est-à-dire de longueur constante, quelle que soit la position de t. Comme ce segment m'n' est la moitié du segment intercepté par les droites am, an sur le côté tangent en c, la propriété est démontrée.

QUESTION 572

Solution par A. Droz-Farny.

Dans un triangle ABC dont les hauteurs sont AA', BB', CC'. on prend les symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux sommets du triangle et on obtient ainsi un triangle A"B"C". On prend encore les symétriques des sommets A, B, C par rapport aux pieds des hauteurs A', B', C', et on obtient un triangle A"B"C". Si S, S', S", S" représentent respectivement les aires des triangles ABC, A'B'C', A"B"C", A"B"C", on a les relations suivantes:

$$S'' - S' = 6S$$
, $S''' - 4S' = 3S$, $4S'' - S''' = 21S$. (E.-N. Barisien.)

I. Calcul du triangle S'. — Le triangle AB'C' est semblable au triangle ABC, le rapport de similitude étant cosA.

On a donc
$$AB'C' = S \cdot \cos^2 A$$
.
d'où $S' = S[1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C]$

(1) $S' = 2S.\cos A.\cos B.\cos C$. II. Calcul du triangle S''. — On a

 $\Lambda A' = 2RsinBsinC$ AII = 2RcosA

angle
$$AHB = 180 - C$$
,

triangle

 $HA''B'' = 2R^2[\cos A + \sin B \sin C][\cos B + \sin A \sin C]\sin C$.

En additionnant les trois triangles analogues, on a

$$S'' = 2R^{2} \left[\sum_{cosAcosBsinC+} \sum_{cosAsinAsin^{2}B+cosAsinAsin^{2}C} + \sin A \sin B \sin C (\sin^{2}A + \sin^{2}B + \sin^{2}C) \right]$$

Or, on trouve aisément

 $\Sigma \cos A \cos B \sin C = \sin A \sin B \sin C$,

 $\Sigma \cos A \sin A (\sin^2 B + \sin^2 C) = 3 \sin A \sin B \sin C,$ $\sin A \sin B \sin C(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

et $= 2\sin A \sin B \sin C(\tau + \cos A \cos B \cos C)$.

 $S'' = 4R^2 \sin A \sin B \sin C(3 + \cos A \cos B \cos C),$ d'où $S'' = S(6 + 2\cos A\cos B\cos C).$ (2)

III. Calcul de S'''.

$$S''' = {}_{4}S - CA'''B'' - BA'''C''' - AB'''C'''.$$

Or.

$$CA'''B''' = \frac{ab}{2}\sin 3C = S\frac{\sin 3C}{\sin C} = S(3 - 4\sin^2 C),$$

 $S'' = 4S - S \circ - 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

 $S''' = S(3 + 8\cos A\cos B\cos C)$

Les relations de M. Barisien sont la conséquence directe des formules développées.

Nota. - Autre solution par M. Davidoglou.

QUESTIONS PROPUSÉES

610. - Soient AT, BT, CT, les tangentes en A, B, C au cercle circonscrit au triangle AEC; T1, T2, T3 étant les points où ces tangentes rencontrent BC,CA,AB. On considère ces tangentes comme positives, si elles rencontrent les côtés dans les directions BC, CA, AB; négatives, si elles les rencontrent dans le sens contraire. Montrer qu'on a toujours

$$\frac{1}{AT_1} + \frac{I}{BT_2} + \frac{I}{CT_3} = 0.$$
 (Tzitzéica.)

611. - On considère le point de Steiner R et les deux points o.o' de Brocard, d'un triangle ABC; Ro rencontre AC en M, Rω' rencontre AB en N. Les droites Bω et Cω' (Tzitzéica.) se rencontrent sur MN.

- 612. 1º On considère un triangle ABC rectangle en A, les pieds M et M' de la hauteur et de la symédiane issues de A; on achève le parallélogramme AMM'D. Montrer que ABCD est un rectangle (Tzitzéica.)
- **613.** On prolonge la diagonale AC = a d'un rectangle d'une longueur AE = b; puis on projette E en F et G sur AD et AB. Soient d, d les distances de A à BD et FG, et a la distance des points A et A et A et A est donnée par A et A est donnée par

$${}_{2}S = \delta^{2} \cdot \frac{d - d'}{a + b} \cdot$$

(Tzitzéica.)

614. - Résoudre les deux équations

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2.$$

E.-N. Barisien.)

- 615. Soient H le pied de la hauteur AH d'un triangle, E et E' les points de contact du cercle des neuf points avec le cercle inscrit et le cercle ex-inscrit situé dans l'angle A. D et D' les points de contact de la seconde tangente commune intérieure à ces deux cercles; les triangles HDE' et HEE' sont semblables, et la droite HC est la bissectrice commune des angles DHE' et EHD'. (L. Vautré.)
- **616.** Les symétriques d'une même figure F_0 , prises respectivement par rapport aux trois côtés d'un triangle, sont trois figures égales F_1 , F_2 , F_3 ; les sommets du triangle coïncident avec les points doubles, ou centres de rotation S_1 , S_2 , S_3 des trois couples F_2 et F_3 , F_3 et F_1 , F_1 et F_2 .

Réciproquement (*), trois figures égales F1, F2, F3. situées

^(*) Cette réciproque est connue. (Voir Nouvelles Annales, 1882, p. 296.) Dans cet article, Halphen prend, pour point de départ, ce théorème donné par M. Cyparissos Stéphanos dans le Bulletin de la Société Philomatique (7° série, tome VI, p. 13). L'intérêt de la question, ici posée, réside dans la méthode qui est indiquée pour arriver à la propositiou, en considérant celle-ci comme une proposition réciproque.

d'une manière arbitraire sur un plan, coïncident avec les symétriques d'une même figure F_0 , prises respectivement avec trois droites qui sont les côtés du triangle de similitude $S_1S_2S_3$ des trois figures égales. (G. Tarry.)

617. — On donne une circonférence de centre O et une droite Δ .

D'un point A, mobile sur Δ , on mène les tangentes AB, AC et l'on trace la circonférence Δ' circonscrite à AEC. La tangente en O, à Δ' , coupe Δ en un point D; de D, on peut mener à Δ une autre tangente DI. Quel est le lieu de I?

618. — On considère un triangle ABC. Sur BC comme diamètre on décrit un cercle Δ qui coupe: AB, en P; AC, en Q. La polaire A par rapport à Δ coupe le cercle APQ en deux points R, R'. L'une des droites AR, AR', est la hauteur correspondant à BC; l'autre est la médiane.

(G. L.)

619. — On donne un triangle abc. On mène la bissectrice intérieure de l'angle de ce triangle dont le sommet est a; cette droite coupe bc au point p. On mène pm parallèlement à ac et cm perpendiculairement à ap: ces deux droites se coupeut en m. Démontrer que am est une médiane du triangle.

(Mannheim.)

ERRATA

Page 47, ligne 16, remplacer le mot Centre par point de contact avec FF'.
Page 48. énoncé 606, il faut: le point D est le centre des symédianes (la lettre D est tombée à l'impression).

Le Directeur Gérant, G. DE LONGCHAMPS.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT

Par Mmo Vo F. Prime.

(Suite, voir rage 49.)

B. Démonstration de la formule

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$
.

Observons que l'on a

 $\cos \alpha - \cos \alpha \equiv 0,$

et

(2)
$$\sin \alpha - \sin \alpha = 0,$$

quelle que soit la valeur de α .

Or ces i lentités sont équivalentes aux suivantes

(1')
$$\sin \alpha . \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \alpha + \cos \alpha . \cos \pi \equiv 0,$$

(2')
$$\sin \alpha . \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos \alpha . \cos \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0;$$
ou encore à

(1")
$$\sum_{i=1}^{n} r_{i} \cos \alpha_{i} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{i} \cos \left(\alpha_{i} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$
si
$$r_{1} = \sin \alpha_{1}, \quad r_{2} = 1, \quad r_{3} = \cos \alpha_{1},$$

$$\alpha_{1} = \frac{3\pi}{2}, \quad \alpha_{2} = \alpha_{1}, \quad \alpha_{3} = \pi.$$

Le théorème de Laisant est donc applicable à ces identités et l'on a, pour toute valeur de β ,

$$\sin \alpha \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) + \cos (\alpha + \beta) + \cos \alpha \cdot \cos (\pi + \beta) = 0,$$
d'où
$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

C. Application de la théorie des projections à la géométrie analytique à deux dimensions.

1. -- Les coordonnées cartésiennes du point M dans les axes x_1 x_2 y_1 y_2 d'angle θ , sont, par définition, les projections d'angle θ du vecteur \overline{OM} sur ces deux axes.

L'angle α que la direction OM fait avec $x_1 x$ a été défini

précédemment; l'angle β que la même direction fait avec y_1y est défini par la formule

$$\alpha + \beta = \theta + 2k\pi.$$

C'est l'angle dont \overline{OM} doit tourner autour de O, de droite à gauche, pour coïncider avec y_1y .

2. — Si $\overline{OM}=1$, les coordonnées de M sont les coefficients directeurs de la direction OM; en les appelant λ, μ , on a

$$\lambda = \frac{\sin (\theta - \alpha)}{\sin \theta} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}.$$

Il en résulte que

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos\theta = 1.$$

3. - Prenons sur l'axe OM le vecteur $\overline{ON} = r$ et multiplions les deux membres de (1) par r^2 ; il vient ainsi

$$(\lambda r)^2 + (\mu r)^2 + 2(\lambda r) \cdot (\mu r) \cos \theta = r^2.$$

Mais, si x et y sont les ceordonnées de N, on a

$$x = \lambda r, \qquad y = y r,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta.$$

d'où

Cette formule est celle qui donne la distance d'un point à l'origine.

4. — Si $(x_1.y_1)$, $(x_2.y_2)$ sont les coordonnées des points A_1 , A_2 , le contour OA_1A_2O projeté sur les axes conduit aux deux identités

et
$$\begin{array}{c} (\overline{\mathbf{A_1}}\overline{\mathbf{A_2}})_x = x_2 - x_1, \\ (\overline{\mathbf{A_1}}\overline{\mathbf{A_2}})_y = y_2 - y_1. \end{array}$$

5. — Considérons, sur la droite A_1A_2 , un troisième point A_3 de coordonnées x_3 , y_3 et ayant attribué un sens à la droite A_1A_2 , désignons, par λ , μ , ses coefficients directeurs, par r_1 le vecteur $\overline{A_1A_3}$ et par r_2 le vecteur $\overline{A_3A_2}$. La position du point A_3 sur l'axe A_1A_2 est alors entièrement déterminée par la valeur k du rapport $\frac{r_1}{r_2}$. Déterminons les coordonnées de A_3 en fonction de k

On a
$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\lambda r_1}{\lambda r_2} = \frac{(r_1)}{(r_2)_x} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3},$$
d'où

(2)
$$x_3 = \frac{x_1 + k x_2}{1 + k}.$$

On trouverait de même

$$y_3 = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

- 6. Remarque. La démonstration précédente suppose $\lambda \neq 0$; si $\lambda = 0$, $\Lambda_1 \Lambda_2$ est parallèle à $y_1 y$, $x_1 = x_2 = x_3$ et la formule (1) est évidente.
- 7. Rotation des axes autour de l'origine. Soient OX, OY les nouveaux axes définis par les angles α_1 , α_2 qu'ils font avec ox. Posons

$$\begin{split} \lambda_1 &= \frac{\sin{(\theta - \alpha_1)}}{\sin{\theta}}, \qquad \quad \mu_1 &= \frac{\sin{\alpha_1}}{\sin{\theta}}, \\ \lambda_2 &= \frac{\sin{(\theta - \alpha_2)}}{\sin{\theta}}, \qquad \quad \mu_2 &= \frac{\sin{\alpha_2}}{\sin{\theta}}, \end{split}$$

et soient $X = \overline{OP}$, $Y = \overline{PM}$ les coordonnées d'un point M dans les nouveaux axes, x, y les coordonnées dun même point dans les anciens axes.

On a, en projetant parallèlement à l'ancien axe des y,

$$\begin{array}{c} (\overline{\mathrm{OM}})_x = (\overline{\mathrm{OP}})_x + (\overline{\mathrm{PM}})_x. \\ \mathrm{Mais} \ (\overline{\mathrm{OM}})_x = x \ , \quad (\overline{\mathrm{OP}})_x = \lambda_1 \mathrm{X} \ , \quad (\overline{\mathrm{PM}})_r = \lambda_2 \mathrm{Y} \\ \mathrm{donc} \qquad \qquad x = \lambda_1 \mathrm{X} + \lambda_2 \mathrm{Y} \ , \\ \mathrm{et} \qquad \qquad y = \mu_1 \mathrm{X} + \mu_2 \mathrm{Y} \ . \end{array}$$

8. Équation de la ligne droite. — Sachant qu'une transformation de coordonnées cartésiennes n'altère pas le degré d'une équation algébrique, on démontre facilement que toute ligne droite peut être représentée par une équation du premier degré. Mais les démonstrations du théorème réciproque sont généralement assez longues; je crois que la suivarte est la plus simple qu'il soit possible de proposer.

Soit
$$Ax + By + C = 0$$

l'équation considérée. Nous pouvons y supposer les coefficients A, B différents de zéro: car si l'un d'eux était nul, l'équation représenterait évidemment une parallèle à l'un des axes coordonnés et si tous deux étaient nuls, l'équation serait impossible ou indéterminée, selon les valeurs données à C.

Donnons à x les deux valeurs arbitraires x_1, x_2 et soient y_1, y_2 les valeurs correspondantes de y fournies par (1). Ces

valeurs des y sont finies, déterminées et distinctes en vertu des hypothèses faites sur A et B. Les deux points $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ appartiennent donc au lieu de l'équation (1).

Prenons un point quelconque $A_3(x_3, y_3)$ sur la droite A_1A_2 et désignons par k le rapport suivant lequel il partage le segment A_1A_2 ; nous avons

$$x_3 = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k},$$
 $y_3 = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k},$

d'où $Ax_3 + By_3 + C \equiv 0$.

Tous les points de A_1A_2 appartiennent donc au lieu défini par l'équation (1). D'autre part, un point non situé sur A_1A_2 ne peut pas appartenir au lieu, sinon l'équation (1) qui est de premier degré en y, devrait, pour une seule valeur de x, donner deux valeurs de y, ce qui est impossible.

D. Les projections dans l'espace.

- 1. Dans l'espace, les projections sur un axe se font par des plans parallèles à un plan donné. Tous les théorèmes démontrés au § A sont applicables à ces projections, à l'exception des nos 12 et 14.
 - 2. Comme application, proposons-nous de démontrer la

formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

F C DA

Soit O le centre de sphère de rayon égal à l'unité sur laquelle est tracé le triangle sphérique ABC. Construisons, au point O, l'angle plan FOG de dièdre A et prenons OF, OG, OA, OB, OC

comme axes positifs. Les coordonnées de point C dans les axes OA, OG sont

$$\overline{OE} = \cos b$$
, $\overline{EC} = \sin b$;

ou a de même

On a

$$\overline{\mathrm{OD}} = \cos c, \quad \overline{\mathrm{DB}} = \sin c.$$
 $(\overline{\mathrm{OB}})_{\mathrm{oc}} = (\overline{\mathrm{OD}})_{\mathrm{oc}} + (\overline{\mathrm{DB}})_{\mathrm{oc}}.$

Mais si les projections sont orthogonales :

$$(\overline{OB})_{oc} = \cos a, (\overline{OD})_{oc} = \cos c.\cos b, (\overline{DB})_{oc} = \sin c.\cos(\overline{OF,OC});$$

d'où
$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin c \cdot \cos(\widehat{OF,OC})$$
.

D'autre part,
$$(\overline{OC})_{of} = (\overline{OE})_{of} + (\overline{EC})_{of}$$
.

$$(\overline{OU})_{OF} = \cos(\widehat{OU,OF}) = \cos(\widehat{OF,OU}),$$

$$(\overline{\mathrm{OE}})_{\mathrm{or}} = 0$$
 et $(\overline{\mathrm{EC}})_{\mathrm{or}} = \sin b \cdot \cos (\widehat{\mathrm{OG},\mathrm{OF}}) = \sin b \cos A$.
On a donc enfin

 $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$.

(A suivre.)

RECTIFICATION APPROCHÉE DU CERCLE

Par M. M. d'Ocagne.

Dans une communication présentée récemment à la Société mathématique de France, M. Bioche, observant que

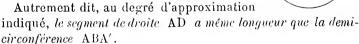
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,1463 = \pi + 0,0047,$$

en déduisait un procédé approché de rectification du cercle consistant à construire géométriquement $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ et à ajouter les segments ainsi

obtenus.

Je ferai observer ici qu'il est très facile de construire directement $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Dans le cercle ABA' dont le rayon est pris pour unité, tirons le rayon OB à 45° sur OA'. La parallèle à OA', menée par B, coupe la tangente en A' au point C. La bissectrice de l'angle COA coupe la tangente en A au point D, tel que AD = $\sqrt{2}$ + $\sqrt{3}$.



La démonstration est des plus faciles. On a

$$\operatorname{tg} AOD = \operatorname{tg} \frac{AOC}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos AOC}{1 + \cos AOC}}.$$

Or,
$$\cos AOC = -\cos A'OC = -\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 A'OC}}$$

et

Done

Mais, d'après la construction

$$tg AOC = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$cos AOC = -\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$tg AOD = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{2}{3}}}{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}},$$

ou, en multipliant haut et bas par $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, tg AOD = $\sqrt{3} + \sqrt{2}$,

C. O. F. D.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

par E .- N. Barisien.

Soit à résoudre le système de deux équations (*)

$$(1) xy = a^2,$$

$$(2) (x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2).$$

Si l'on cherche à résoudre directement ces équations, on aboutit à une équation du 8° degré en x qui, étant bicarrée, peut se ramener à une équation du 4° degré : mais la résolution de celle-ci offre des difficultés.

Posons $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ (effectuant ainsi la transformation du système cartésien, dans le système des coordonnées polaires), nous avons

$$\varepsilon^2 = \frac{2n^2}{\sin 2\theta},$$

(4)
$$s^2 = 4a^2 \cos 2\theta,$$

^(*) On voit que (1) représente une hyperbole équilatère et (2) une lemniscate de Bernoulli.

et, par conséquent,

$$2 \sin 2\theta \cos 2\theta = 1,$$

$$\sin 4\theta = 1,$$

Prenons la solution

$$\theta = \frac{\pi}{8}$$
,

et alors

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}} = a\sqrt{2\sqrt{2}}.$$

Nous avons donc

$$x = \rho \cos \theta = a \sqrt{2\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = a \sqrt{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}}$$
ou bien
$$x = a \sqrt{\sqrt{2} + 1}.$$

Les courbes (3) et (4) étant tangentes, il en résulte que les huit valeurs de x de l'équation formée par l'élimination de y entre (1) et (2), sont composées des quatre racines doubles

$$x_1 = a\sqrt{\sqrt{2} + 1},$$
 $x_3 = a\sqrt{-(\sqrt{2} - 1)},$ $x_4 = -a\sqrt{-(\sqrt{2} - 1)}.$

Les valeurs correspondantes de y sont

$$y_1 = a\sqrt{\sqrt{2} - 1},$$
 $y_2 = -a\sqrt{\sqrt{2} - 1},$ $y_3 = a\sqrt{-(\sqrt{2} + 1)},$ $y_4 = -a\sqrt{-(\sqrt{2} + 1)}.$

SUR LE DEPLACEMENT

DES FIGURES SEMBLABLES

Par M. G. Tarry.

Théorème. — Deux figures directement ou inversement semblables, qui ne sont pas homothétiques, ont toujours une droite double sur laquelle les divisions semblables formées par les points homologues des deux figures sont de même sens ou de sens contraires, suivant que ces figures sont directement ou inversement semblables.

Pour éliminer tout cas particulier, nous considérons comme homothétiques deux figures directement égales qui peuvent être mises en coïncidence par un mouvement de translation parallèle et deux figures inversement égales qui son

symétriques par rapport à un plan.

Soient F, F' deux figures semblables et p, p' deux points homologues dans ces figures. Construisons la figure F' directement égale à la figure F, directement ou inversement homothétique à la figure F', suivant que les figures F et F' sont directement ou inversement semblables, et telle que le point p, considéré dans la figure F', ait pour homologue le point p' dans la figure F'.

Les figures directement égales F'' et F, qui ont un point double p, peuvent être amenées en coïncidence par une rotation autour d'un axe qui passe par p, et tous les points de

cet axe sont des points doubles des figures F" et F.

Considérons dans la figure F" des droites a", b", c",... parallèles à cet axe. Ces parallèles ont pour homologues, dans les figures F et F', les droites a, b, c,... et a', b', c'..., toutes parallèles à cet axe. Les projections de ces droites sur un plan perpendiculaire à leur direction déterminent trois figures A"B"C', ABC, A'B'C'. Les figures A"B"C" et ABC sont directement égales et ont un centre de rotation; les figures A"B"C" et A'B'C' sont homothétiques. Par suite, les figures ABC et A'B'C' sont directement semblables et ont un point double X, appelé centre de similitude. On voit aisément que la perpendiculaire x, menée à ce plan par le point double X, est une droite double des figures semblables F et F'. La droite double disparaît à l'infini dans le cas seulement où les triangles ABC, A'B'C' sont égaux et ont leurs côtés parallèles de mème sens.

Les divisions formées par les points homologues sur des droites homologues parallèles à la droite double, que j'appellerai axe de similitude, sont égales et de même sens dans les figures F' et F, semblables dans les figures F'' et F' et de même sens ou de sens contraires, suivant que les figures F'' et F' sont directement ou inversement homothétiques. Par conséquent, les divisions semblables formées sur l'axe de similitude par les points homologues des figures F et F' sont de même sens ou de sens contraires, suivant que ces deux figures sont directement ou inversement semblables.

Le théorème est donc démontré.

Si les deux figures F et F' sont semblables, sans être égales, leur droite double ne peut être à l'infini, et les deux divisions homologues marquées sur leur axe de similitude out toujours un point double. Le plan mené par ce point double perpendiculairement à l'axe de similitude est évidemment un plan double. On a donc le théorème suivant, qui a été démoutré autrement par M. Dorlet (J. E., 1894, p. 241).

Deux figures directement ou inversement semblables ont toujours un plan double, une droite double (axe de similitude) perpendiculaire au plan double, et un point double qui est le pied de cette perpendiculaire. Par un mouvement de rotation autour de l'axe de similitude on peut placer les deux figures semblables de manière à être homothétiques.

Si les deux figures sont inversement égales, leur droite droite double peut disparaître à l'infini. Nous distinguerons quatre cas:

 $1^{\rm o}$ Les plans perpendiculaires aux milieux des droites qui joignent les couples de points homologues ont en commun un point unique $\,{\rm X}\,.$

Les deux figures inversement égales ont un point double X, une droite double et un plan double. Par une rotation autour de la droite double, on peut rendre les deux figures symétriques, soit par rapport au point X, soit par rapport au plan double.

2º Les plans perpendiculaires passent par une même droite x. Les deux figures ont une droite double x, dont tous les points sont des points doubles.

Tous les plans perpendiculaires à la droite double sont des plans doubles, qui coupent les figures considérées suivant deux figures planes symétriques.

On conclut de là que les deux figures données sont symétriques par rapport à un plan, et l'on rentre dans le cas suivant.

3º Les plans perpendiculaires se confondent en un seul.

Les deux figures sont symétriques par rapport à ce plan, et par une rotation de 180° autour d'une droite perpendicu-

JOURNAL DE MATH. ÉLÉM. - 1895.

laire au plan de symétrie on place les deux figures symétriquement par rapport au pied de la perpendiculaire.

4º Les plans perpendiculaires n'ont aucun point commun. Les deux figures ont encore un plan double qui les coupe suivant deux figures égales dont les côtés homologues sont parallèles de même sens. On peut, par une translation parallèle, rendre les deux figures symétriques par rapport au plan double, et par une rotation de 180º autour d'une perpendiculaire quelconque au plan double, les placer en symétrie par rapport à un point; ce point, situé dans le plan double, ne peut coïncider avec le pied de la perpendiculaire.

En résumé: Deux figures inversement égales peuvent toujours être placées en position symétrique par rapport à un plan ou un point, soit par un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, soit par un mouvement de translation parallèle.

Enfin, considérons le cas où les deux figures sont directement égales. Ces figures ont toujours une droite double, si elles ne peuvent être mises en coïncidence par un mouvement de translation parallèle. Les divisions égales déterminées sur la droite double par les points correspondants sont de même sens. Communiquons à l'une de ces figures un mouvement de translation parallèle à la droite double, de façon qu'un de ses points situés sur cette droite vienne coïncider avec son correspondant dans l'autre figure. Dans cette position, les deux figures ent en commun, point par point, la droite double, et par une rotation autour de cette droite l'une des figures peut être amenée en coïncidence avec l'autre. Il est permis d'effectuer ces deux mouvements simultanément et uniformément. D'où il résulte que

Tout changement de position d'un système invariable peut être obtenu par un mouvement hélicoïdal autour d'une certaine droite fixe.

M. Poulain a fait ressortir le défaut de rigueur de la démonstration classique, qui établit l'existence du point double (centre de similitude) de deux figures directement semblables situées dans un même plan (J. S. 1891, p. 193).

Nous compléterons la partie de cette note relative aux axes

de similitude en indiquant une construction plus rationnelle du centre de similitude.

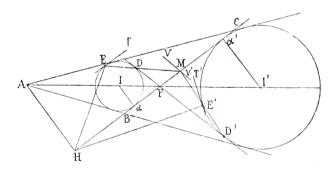
Soient AB, A'B' deux segments homologues et X le centre de similitude cherché.

On connaît le rapport des deux segments XA et XA', égal au rapport des deux segments homologues AB et A'B', et l'angle des semi-droites XA et XA', égal à l'angle formé par les semi-droites AB et A'B'. Le problème est donc ramené à construire un triangle AXA' de similitude donnée, connaissant l'un de ses côtés AA'.

Il résulte de cette construction que les perpendiculaires élevées aux milieux de deux segments égaux AB et A'B' se coupent en un point X tel que les deux triangles XAB et XA'B' soient directement égaux, et non inversement égaux.

LE THÉORÈME DE FEUERBACH

Considérons le triangle ABC. Soient α et α' les points de contact de BC avec le cercle inscrit I et le cercle ex-inscrit I', H le pied de la hauteur, M le milieu de BC. Menons



la tangente commune DD', puis les sécantes MDE, ME'D', les tangentes ET et ET', enfin V'MV, parallèle à DD' et par conséquent antiparallèle à BC par rapport à l'angle A. Les droites DD' et az' se coupent en F sur la bissec-

d'où

trice AII', et la division harmonique AFII' se projette suivant une division harmonique HF $\alpha\alpha'$. On sait d'ailleurs que M est le milieu du segment $\alpha\alpha'$. Donc

$$MH.MF = \overline{Mz^2} = MD.ME$$
.

Il en résulte que le quadrilatère HFDE est inscriptible. Par conséquent;

$$\widehat{MHE} = \widehat{DMV}, \quad \text{et} \quad \widehat{MHE} = \widehat{DET}$$

Ces deux relations prouvent : 1° que le cercle Δ qui, passant aux points H et M, admet pour tangente MV (autrement dit le cercle des neuf points), passe au point E; 2° que ce cercle Δ est tangent à la droite $E\Gamma$, et par conséquent au cercle I.

On prouverait de même que les cercles Δ et I' se touchent au point E'.

EXERCICES DIVERS

Par Aug. Boutin

376. — Trouver sept triangulaires consécutifs dont la somme soit un triangulaire.

On est amené à résoudre en nombres entiers:

$$z^2 - 7y^2 = 106$$
.

Cette équation a une infinité de solutions, il en est donc de même de la question proposée; toutes les solutions sont données par les suites :

$$y = 1, 15, 63, 243, 1005, 3873, ...$$

 $z = 13, 41, 167, 643, 2659, 10247, ...$
 $y_n = 16y_{n-2} - y_{n-4}$
 $z_n = 16z_{n-2} - z_{n-4}$

x étant le plus petit des triangulaires cherchés, on a : 2x = y - 7, et toutes les solutions sont fournies par la suite :

$$x = 4, 28, 118, 499, 1933, \dots$$

 $x_n = 16x_{n-2} - x_{n-4} + 49.$

377. — On ne saurait trouver n triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré, n ayant une des valeurs suivantes:

378. — Trouver trois triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré.

Ce problème conduit à l'équation

$$8k^2 - 5 = 3r^2$$

Voir J. M. E., 1894, Ex. 332) qu'il faut résoudre en nombres entiers.

x étant le rang du plus petit des triangulaires considérés, on a toutes les solutions par la suite :

$$x_1 = 5,$$
 $x_2 = 14,$
 $x_3 = 63,$
 $x_4 = 152,$
 $x_{2n+1} = 5x_{2n} - 2x_{2n-1} + 3,$
 $x_{2n} = \frac{1}{2} \left(5x_{2n-1} - x_{2n-2} + 3 \right).$

379. — Trouver quatre triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré.

On est amené à résoudre en nombres entiers l'équation bien connue: $2k^2 - 1 = y^2$.

x étant le rang du plus petit des triangulaires considérés, on a toutes les solutions par les formules :

$$x = y - 2,$$

 $x_1 = 5,$ $x_2 = 39,$ \dots $x_n = 6x_{n-1} - x_{n-2} + 8.$

380. — Trouver onze triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré.

On est amené à résoudre en nombres entiers l'équation :

$$22k^2 - 30 = y^2$$

qui a une infinité de solutions; il en est donc de même du problème proposé.

$$2x = y - 11.$$

Les premières valeurs de x sont:

x étant le rang du plus petit des triangulaires cherchés.

381. — Trouver 13 triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré.

L'équation est alors $y^2 + 55 = 26k^2$ qui admet une infinité de solutions entières. Si x est le rang du plus petit des triangulaires considérés. on a :

$$2x = y - 13$$
.

Les premières valeurs de x sont:

382. — Trouver 22 triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré.

Il faut résoudre, en nombres entiers, l'équation :

$$y^2 + 10 = 11k^2$$
.

Toutes les solutions sont données par la suite:

$$y_0 = 1$$
, $y_1 = 23$, $y_2 = 43$, $y_3 = 461$, $y_4 = 859$
 $y_n = 20y_{n-2} - y_{n-1}$,

x étant le rang du plus petit des triangulaires considérés.

$$x = 2y - 11$$
.

On a done

$$x_1 = 35$$
, $x_2 = 75$, $x_3 = 911$, $x_4 = 1707...$
 $x_n = 20x_{n-2} - x_{n-1} + 198$.

383. — Trouver 23 triangulaires successifs dont la somme soit un carré.

On est amené à résoudre en nombres entiers l'équation :

 $46k^2 - 7 = y^2$

qui a une infinité de solutions. Si x est le rang du plus petit des triangulaires considérés,

2x = 5y - 23.

Les premières valeurs de x sont :

56.7856.3 293 081.....

BACCALAURÉATS

Académie de Montpellier.

I. — On donne le côté a d'un triangle, l'angle opposé ${\bf A}$ et la médiane m relative à ce côté. Calculer les deux autres côtés. Discussion.

II. — Trouver tous les arcs x qui satisfont à l'équation :

$$tg x + \cos x = \frac{7}{253}$$

I. — Etant donné un point A et une droite XY, déterminer un triangle ABC, sachant que le côté BC est sur XY et a une longueur donnée 2a, et que la somme AB + AC des deux autres côtés est égale à une quantité donnée S.

II. — Étudier les variations de la fraction :

$$\frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}.$$

III. — Résoudre le système d'équations :

 $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \qquad \cos x + \cos y = b.$

Discuter le problème (*).

Académie de Nancy.

Questions à choisir. — (a) Démontrer que chaque face d'un trièdre est moindre que la somme des deux autres.

(b) Démontrer que si l'on prolonge les arêtes d'un angle trièdre quelconque au delà de son sommet, on forme un nouvel angle trièdre qui ne peut lui être superposé bien qu'il soit composé des mêmes éléments.

(c) Démontrer que la somme des faces d'un angle polyèdre convexe

est moindre que quatre angles droits.

Problème. — On donne le rayon de base a et la hauteur h d'un cône circulaire droit. Calculer le rayon x et la hauteur y d'un cylindre ABCD inscrit dans ce cône et tel que sa surface totale soit égale à celle d'une sphère de rayon a. a étant donné, comment doit être choisi h pour que le problème soit possible. Discuter.

^(*) J'insérerai bien volontiers la solution de ce problème, qui me paraît fort difficile, si quelque correspondant veut bien me l'adresser. G. L.

Académie de Poitiers.

I. — 1° Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire irréductible $\frac{a}{b}$ puisse être convertie exactement en fraction décimale.

2º Par le foyer d'une parabole, on mène une droite inclinée d'un angle α sur l'axe de la courbe et rencontrant celle-ci en deux points MM'. Connaissant la distance p du foyer à la directrice, on demande de déterminer : 1º la hauteur au-dessus de l'axe des points de rencontre des tangentes en M et M' avec la directrice; 2º les distances au foyer des points de rencontre de ces tangentes avec l'axe de la courbe.

Ouestions à choisir. II. — (a) Équilibre de la poulie mobile.

(b). - Couple. Composition des couples.

(c). — Equilibre des forces appliquées à un corps solide mobile autour d'un axe fixe.

Problème. — Inscrire dans une demi-circonférence un trapèze de péri mètre donné. Discussion.

III. — Une demi-circonférence étant partagée en cinq parties égales, on demande de calculer, en fonction du rayon R, les cordes qui sous-tendent les arcs égaux à une, deux, trois et quatre divisions. Relation de ces cordes entre elles.

IV. - Résoudre l'équation:

$$\operatorname{tg} x - \cos x = \frac{1}{m}$$
 Valeur de x pour $m = \frac{1}{2}$

Académie de Rennes.

1. — 1º Plans perpendiculaires. Définition.

Théorème. — La condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires est que l'un d'eux contienne une perpendiculaire à l'autre.

Conséquence relative à l'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième.

2º On donne trois droites OA, OB, OC, faisant entre elles les angles $AOC = \alpha$, $BOC = \beta$ et un point C à la distance $OC = \alpha$ du point O. Mener par ce point une droite CBA telle que l'on ait $CB \times CA = CO^2$. Valeur de l'angle ACO = x. On formera les expressions des longueurs CB et CA en fonction de x et des données.

II. — 1º Résolution de l'équation $a \sin x + b \cos x = c$. Nombre et

condition de réalité des racines.

 2° On donne une circonférence O de rayon r, un point A dont a est la distance au centre, une perpendiculaire BB' à OA dont b est la distance de ce même centre.

Mener par A la droite ANM telle que le rapport de AM à AN soit le nomi re donné K. Calculer ces segments ainsi que les angles OAM AOM. Limites extrêmes de K quand a, b, r restent fixes.

III. — 1° Questions à choisir. (a) Résolution des équations simultanées ax + by = c a'x + b'y = c'.

Composition des formules. Discussion.

(b) Exprimer $\sin x$ et $\cos x$: 1° en $\tan x$; 2° en $\tan \frac{x}{2}$. Expliquer a prior les nombres de valeurs obtenues dans les deux cas.

(c) Démontrer la suite des propositions d'où il résulte que tout nombre

est décomposable, et d'une seule manière en facteurs premiers.

2º Problème. On donne un demi-cercle ACB de diamètre AB = 2R. Comment faut-il mener la corde BC pour que dans la rotation de la figure autour de AB les deux proportions du demi-cercle déterminées par cette corde engendrent des volumes équivalents?

Académie de Toulouse.

I. — On donne un triangle ABC rectangle en A. Trouver sur l'hypoténuse un point D tel que la somme DE + DF des perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux autres soit égale à une longueur donnée Discuter le problème.

II. — 1º Réduction des forces à deux, dont l'une est appliquée en un

point pris à volonté.

2º Déterminer les valeurs maximum et minimum de

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$$
,

x variant de $-\infty$ à $+\infty$.

Académie de Paris (21 juillet 1894).

1. — Problème obligatoire:

Calculer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant sa surface S et la somme $\frac{\pi a^2}{3}$ des volumes engendrés par le triangle tournant successivement autour des deux côtés de l'angle droit.

Trois questions à choisir:

Énoncer et démontrer la propriété fondamentale :

(a) De la tangente à l'ellipse;

(b) De la tangente à la parabole;

(c) De la sous-normale de la parabole.

BIBLIOGRAPHIE

La librairie Belin frères (52, rue de Vaugirard, vient de faire paraître des Étéments de géomètrie, à l'usage des classes de lettres, par M. Ch. Bioche, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences

mathématiques.

Le public particulier auquel s'adresse un pareil volume demande, avant tout, que les matières qui y sont exposées soient restreintes aux limites fixées par les programmes et qu'elles y soient clairement établies. Le livre de M. Bioche nous a paru répondre complètement à cette exigence. De nombreux exercices accompagnent les différents chapitres et nous ne saurions trop les recommander aux débutants. Quelques-uns sont numériques et leur conviennent tout particulièrement. On ne comprend bien les idées mathématiques, au moins au début, que si l'on fait souvent des applications numériques.

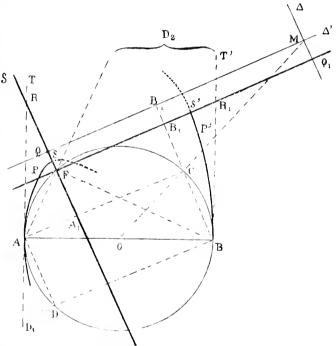
QUESTION 571

Solution par M. Davidoglou.

Soit F un point fixe sur une circonférence. On construit les deux paraboles tangentes à la circonférence aux extrémités d'un diamètre et ayant le point F comme foyer. Démontrer que leurs directrices sont perpendiculaires l'une sur l'autre. Chercher le lieu de leur point d'intersection lorsque le diamètre varie. (Droz-Farny.)

Notations:

T, T', les tangentes au cercle donné, aux extrémites A et B du diamètre AOB.



D le point de rencontre des parallèles AD et BD, aux axes à, à des paraboles D et D'.

D₁ et D₂ les points de rencontre de BD et AF respectivement avec T et T'.

M l'intersection des directrices Δ et Δ' et S, S' les sommets des paraboles F et F'.

R et R_1 les points d'intersections de δ et δ' respectivement avec T et T'.

Q et Q_1 les points d'intersections de δ et δ' respectivement avec Δ et Δ' .

 AA_1 , BB_1 les perpendiculaires sur δ et δ' et c leur point d'intersection.

1º Il suffit de montrer que AD et BD sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

On a, angulairement: $\widehat{FD_2B} = \widehat{FAR} = \widehat{DAD_1}$ et de même $\widehat{FBD_2} = \widehat{DD_1A}$; cela entraîne $\widehat{ADD_1} = \widehat{D_2FB} = 90^\circ$.

C. O. F. D.

2º Prolongeons BB₁ jusqu'à sa rencontre en B₂ avec Δ . Les triangles FAR et BFR, étant évidemment isoscèles, on a : BC = AF = RF = RA₁ = CB₂ et AC = FB = FR₁ = B₁Q₁ = MB₂, ce qui montre que les triangles MCB₂ et TBC sont égaux et, comme R₂CM = OBC = OCB, la droite MC passe par le centre O du cercle donné et l'on a : OM = 3OB = BR. — Le lieu cherché est donc un cercle de centre O et de rayon 3R.

Nota. — Solution analogue par M. Aletrop. Nous avons aussi reçu de bonnes solutions de MM. Tzitzeica, Vazou, Barisien; elles renfermaient des développements analytiques et géométriques très intéressants, mais dépassant le niveau des mathématiques élémentaires.

QUESTION 573 Solution par A. Droz-Farny.

Soient M et m les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse de centre O. On prend sur la normale en M deux points N et N' tels que MN = MN' = Om et sur la normale en m, deux points n et n' tels que mn = mn' = OM. On suppose que n, m sont du même côté par rapport au grand axe, et que les points N et n sont aussi placés du même côté par rapport aux tangentes en M et m On propose d'établir les propriétés suivantes :

Io Les droites Nn', N'n sont perpendiculaires; de plus, on a $Nn' = N'n = Mm \sqrt{2}$;

2º Les droites Nn', N'n, et la parallèle à la corde Mm, menée par O, sont concourantes;

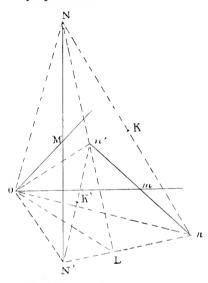
3º La somme des carrés des longueurs Nn et N'n' est égale

au carré de la diagonale du rectangle des axes;

4º Les droites qui joignent le point O au milieu K de Nu et au milieu K' de N'n' sont également inclinées sur les axes de l'ellipse. (E.-N. Barisien.)

La normale en M est la perpendiculaire abaissée de ce

point sur le diamètre Om conjugué à OM. Le triangle OMN est égal au triangle Omn, car OM = mn, MN = Omet angle OMN = Omn. Il en résulte ON = On. Ces triangles étant semblablement disposés et deux des côtés du premier étant respectivement perpendiculaires sur les deux côtés correspondants du second, il en est de même des troisièmes côtés: donc ON est perpendiculaire sur On.



De l'égalité des triangles OMN' et Omn' on déduit de même que les côtés ON' et On'' sont égaux et perpendiculaires l'un sur l'autre. Les triangles ON'n et ONn' sont donc aussi égaux, et par conséquent Nn' et Nn' sont égaux et perpendiculaires l'un sur l'autre.

Il en résulte immédiatement que la figure KmK' est un

carré; donc
$$\overline{MK^2} + \overline{Km^2} = \overline{Mm^2}$$
. d'où $\overline{Nn'^2} = 2\overline{Mm^2}$. $\overline{Nn'} = N'n = \overline{Mn\sqrt{2}}$.

2. Soit L le point d'intersection de Nn' et N'n; les circonférences décrites sur Nn et N'n' comme diamètres se

coupent aux points O et L; donc OL est perpendiculaire sur KK' et par conséquent parallèle à Mm.

3. On a:
$$\overline{Nn^2} = \overline{2On^2},$$
 et
$$\overline{N'n'^2} = 2\overline{On'^2}.$$
 Done
$$Nn^2 + N'n'^2 = 2(On^2 + On'^2) = 4(Om^2 + mn^2)$$
$$= 4(\overline{OM}^2 + \overline{Om}^2) = 4(a^2 + b^2).$$

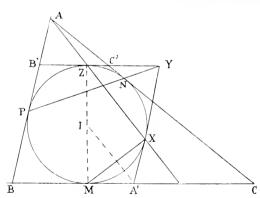
4. Il résulte de la construction des axes d'une ellipse, quand on connaît en grandeur et direction deux diamètres conjugués (méthode de Chasles), que ces droites sont les bissectrices de l'angle NON'; OK étant incliué de 45° sur ON, et OK' de 45° sur ON', ces deux droites seront donc aussi également inclinées sur les axes de l'ellipse.

Nota. — Autres solutions par MM. Davidoglou et Vazou.

$\begin{array}{c} QUESTION~575~.\\ \textbf{Solution par}~M^{me}~V^{e}F.~P_{BIME}. \end{array}$

On donne un triangle et le cercle qui lui est inscrit. On mène à ce cercle la tangente parallèle à l'un des côtés du triangle, et la tangente issue du milieu de ce côté. Démontrer que ces tangentes se coupent sur la droite qui joint les points où le cercle touche les deux autres côtés du triangle. (Mannheim.)

Soit Y le point où la corde des contacts PN du cercle I avec



b et c, coupe la tangente B'C' parallèle à BC. Si Z est le point de contact de B'C', la polaire de Y est AZ qui coupe I pour la seconde fois en X. La polaire de X passant par Y, le

théorème sera démontré si nous prouvons que A'X est tangente à I. (A' est le milieu de BCX). Or A passe par

le point de contact du cercle ex-inscrit I_a avec BC, IA' est donc parallèle à ZX et, par suite, perpendiculaire sur le milieu de MX; d'où...

Nota. — Solutions diverses par MM. Vazou, Davidoglou, Droz-Farny.

Joseph Dhavernas, élève au lycée Michelet, et Alfred Champion.

M. Droz-Farny observe que la droite AZX étant parallèle à la droite IA' qui joint le centre du cercle inscrit au milieu A' du côté BC passe par le point de Nagel du triangle. Les trois points tels que Y appartiennent donc à une droite, polaire du point de Nagel par rapport au cercle inscrit. M. Aletrop a généralisé la question en remplaçant le cercle par une conique quelconque.

QUESTION 577

Solution par M. Goyens.

On donne deux points A et B sur les côtés d'un angle O et l'on prend sur OA, OB des points A', B' tels que l'on ait toujours

$$\frac{AA'}{BB'} = K.$$

Lieu du point I qui divise le segment A'B' dans un rapport donné m. (Verrière.)

Soient M le point de AB tel que $\frac{MA}{MB} = m$, I le point de

A'B' tel que $\frac{\mathrm{IA'}}{\mathrm{IB'}}=m$. Construisons les parallélogrammes

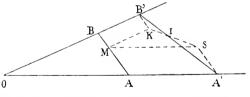
MBB'K, MAA'S. Menons IK et IS. On aura

$$\frac{MA}{MB} = \frac{SA'}{B'K} = \frac{A'I}{B'I} = m.$$

Les deux triangles IB'K, ISA' sont semblables comme ayant un angle égal (KB'I = SA'I) compris entre deux côtés

homologues proportionnels, donc KI et IS sont en ligne droite.

Le triangle MKS reste semblable à lui-



même car l'angle KMS est constant et égal à l'angle O et les côtés MK = BB et MS = AA' sont daus un rapport

constant. Le côté KS reste donc parallèle à lui-même et le point I qui partage ce côté dans un rapport constant décrit une droite passant par le sommet fixe M.

Autrement (par M. Droz-Farry). — Les points A' et B' déterminent sur les côtés de l'angle O deux ponctuelles semblables et par conséquent les droites A'B' enveloppent une parabole tangente aux trois côtés du triangle OAB.

D'après un théorème bien connu, les points qui divisent le segment A'B' d'une tangente variable à une parabole, compris entre deux tangentes fixes suivant un rapport donné, sont sur une ligne droite tangente aussi à la parabole. Cette proposition est un corollaire du théorème général que toute tangente variable à une conique est coupée par quatre tangentes fixes suivant quatre points de rapport anharmonique constant. Il suffit de supposer une tangente à l'infini pour obtenir le théorème énoncé.

Nota. — Autres solutions par MM. VAUTRÉ, DAVIDOGLOU et M . Ve F. PRIME

QUESTION 578

Solution par M. A. Droz-Farny.

Démontrer que dans un triangle on a toujours

$$_4R-r_a>(p-a)\sqrt{3}.$$
 (E. Lemoine.)

Si I et Γ'_a représentent respectivement le centre du cercle inscrit et le premier point du groupe de Gergonne, on a

$$\Pi_a^{r^2} = r'^2 - \frac{3S^2}{\delta_a^2}.$$

Il en résulte immédiatement

d'où

$$r'\delta_a > S\sqrt{3}$$
, or $r' = \frac{S}{p-a}$,
 $+R - r_a > (p-a)\sqrt{3}$.

Remarque. — Cette inégalité peut se mettre sous la forme $p^2 - bc > S\sqrt{3}$.

Nota. — MM. Davidoglou et Jean Negretzu, de Bucarest, nous ont adressé une solution trigonométrique de cette question.

QUESTION 580

Solution par M. VAZOU.

 m_{a} désignant la médiane correspondant au côté a d'un triangle ABC, et A' le deuxième point de rencontre de cette médiane avec la circonférence circonscrite au triangle, on a la relation $3a^2 + 4m_a^2 = 12\,m_{\text{a}}.GA'$

(G désignant le centre de gravité du triangle).

(Lauvernay.)

On a
$$BM + MC = AM.MA'$$
,
ou $\frac{a^2}{4} = m_a(GA' - GM) = m_a\left(GA' - \frac{m_2}{3}\right)$,
ou enfin $3a^2 + 4m_a^2 = 12m_a.GA'$.

Nota. — Solutions analogues par MM. Govens, à Malines; Davidoglou, élève au lycée de Berlad; Droz-Farny; Tzitzeica et Jean Negretzu, à Bucarest; Alfred Champion, et M^{me} V^e Prime (*).

QUESTIONS PROPOSÉES

- **620.** Décrire trois cercles tangents deux à deux en trois points donnés A, B, C. Construire les centres A', B', C' de ces trois cercles et calculer leurs rayons en fonction des distances a, b, c, entre B et C, C et A, A et B. (E. Lebon.)
- 621. On donne un tétraèdre quelconque. De l'un de ses sommets, on mène le plan perpendiculaire à la face opposée à ce sommet et qui contient le point de rencontre des hauteurs du triangle formant cette face. Il y a ainsi quatre plans : démontrer qu'ils se coupent au même point. (Mannheim.)
- **622.** Soient B_1 et C_1 les milieux des côtés AC et AB du triangle ABC, P un point queleonque du côté BC. Les droites PB_1 et PC_1 coupent respectivement AB et AC en B_2 et en C_2 . Démontrer que la droite B_2C_2 est parallèle à AP et qu'elle coupe le côté BC en un point Q tel que

$$\frac{QC}{QB} = \left(\frac{PC}{PB}\right)^{2} \cdot \qquad (M. \text{ d'Ocagne.})$$

^(*) On trouvera dans le n° de ce mois du Journal de Mathématiques spéciales une solution de la question 591 qui a été aussi proposée dans ce journal sous le n° 370.

- 623. Démontrer que l'apothème du pentagone régulier est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit augmenté de la moitié du côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle.

 (Mannheim.)
- 624. 1º Dans un triangle ABC trouver le point M pour lequel on a

 $\overline{AM}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{AB}^2$.

2º Dans un triangle ABC trouver le point M pour lequel on a

 $\overline{AM}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{AB}^2$.
(E. Lemoine.)

- 625. Soient H l'orthocentre d'un triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit; les droites AH et AO coupent le côté BC respectivement aux points A', D; soit α le point milieu de AD. Les trois droites telles que A' α se croisent au centre ω du cercle des neuf points. (Droz-Farny.)
- **626.** On considère le faisceau $O(AA_1A_2...A_{2p}B)$ et la transversale $AA_1A_2...B_{2p}B$. Si l'on désigne par $R_1R_2...R_{2p}$ les rayons des cercles circonscrits aux triangles OAA_1 , $OAA_2...OAA_{2p}$ et par $R_1'R_2'...R_{2p}'$ les rayons des cercles circonscrits aux triangles OBA_1 , $OBA_2...OBA_{2p}$, on a la relation

$$\frac{R_2R_4\dots R_{2p}}{R_1'R_3'\dots R_{2p-1}'} = \frac{R_1R_3\dots R_{2p-1}}{R_2'R_4'\dots R_{2p}'} \cdot \underbrace{\text{(Jean N\'egretzu.)}}$$

ERRATA.

Page 49, ligne 18 du bas, lire somme au lieu de grandeur.

- 54, - 29 du haut, -
$$\sum_{1}^{n}$$
 - \sum_{1}^{n+1}

Le Directeur Gérant, G. DE LONGCHAMPS.

PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Par M. J .- S. Mackay,

Professeur de mathématiques à l'Académie d'Édimbourg.

NOTATIONS

Dans le triangle ABC, les points L, L' sont les pieds des bissectrices des angles en A; X est le pied de la hauteur issue de A; A' le point milieu de BC. I, I_1 , I_2 , I_3 sont les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits; D, D_1 , D_2 , D_3 les points de contact de ces cercles avec BC; et, de même, pour E, E_1 , ... F, F_4 , ...

De B, on abaisse les perpendiculaires BP, BP' sur AL, AL'; et, de C, les perpendiculaires CQ, CQ'.

- (1) D, D₁, P, Q sont situés sur un cercle de centre A'. \smile D₂, D₃, P', Q' —
- (2) Le cercle inscrit et le premier cercle exinscrit à ABC coupent le cercle DPD₁Q orthogonalement; le deuxième et le treisième cercles exinscrits coupent D₂Q'P'D₃ orthogonalement.

On a:

(3) IP. IQ =
$$r^2$$
, I₁P. I₁Q = r_1^2 , I₂P'. I₂Q' = r_2^2 , I₃P'. I₃Q' = r_3^2 .

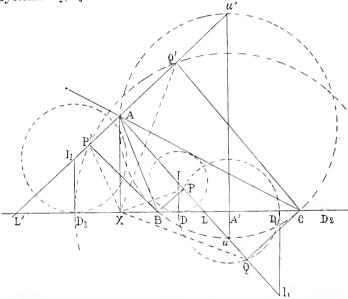
- (4) Si les cercles I, I_1 sont regardés comme un couple d'un système de cercles ayant même axe radical. P, Q sont les points limites du système; et P', Q' sont les points limites du système auquel appartient le couple I_2 , I_3 .
- (3) Les triangles XPQ, XP'Q' (dont les côtés homologues sont perpendiculaires l'un à l'autre) sont inversement semblables à ABC.
- (6) Les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits aux triangles XPQ, XP'Q' sont situés sur BX et AX; de plus, D, D₁ sont les centres du cercle inscrit et du premier cercle exinscrit à XPQ; D₂, D₃ sont les centres du deuxième et du troisième cercles exinscrits à XP'Q'.
 - (7) Les cercles circonscrits à XPQ, XP'Q' passent par A'.
- (8) Les diamètres des cercles XPQ, XP'Q' sont respectivement égaux à Au', Au, uu' étant le diamètre du cercle

circonscrit à ABC perpendiculaire à BC. (u' est du même côté de BC que A.)

(9) Les diamètres des cercles XPQ, XP'Q' coïncident avec

les axes radicaux des cercles I, I1, et I2, I3.

(10) Le cercle XPQ coupe orthogonalement le système de cercles I, I_1 ; et le cercle XP'Q' coupe orthogonalement le système I_2 , I_3 .



(11) La somme des aires des cercles (ou triangles) XPQ, XP'Q' est égale à l'aire du cercle (ou triangle) ABC.

(12) Les centres des cercles XPQ, XP'Q' et le centre du cercle des neuf points de ABC sont collinéaires.

(13) Sont collinéaires, par trois, les points

P, D, E; P, D₁, E₁; P', D₂, E₂; P', D₃, E₃; Q, D, F; Q, D₁, F₁; Q', D₂, F₂; Q', D₃, F₃.

(14) Sont concycliques, par cinq, les points

 (15) Les points Q, L, P, A aussi bien que Q', A, P', L' forment une division harmonique.

(16)
$$AP : AL = \frac{1}{2}(AC + AB) : AC$$

$$AQ : AL = \frac{1}{2}(AC + AB) : AB$$

$$AP' : AL' = \frac{1}{2}(AC - AB) : AC$$

$$AQ' : AL' = \frac{1}{2}(AC - AB) : AB.$$
(17)
$$PQ : AL = P'Q' : AL'$$

$$= AC^2 - AB^2 : 2AC.AB.$$
(18)
$$\Delta ABC = AQ .BP = AP .CQ$$

$$= AQ' .BP' = AP'.CQ'.$$

(19) Si on abaisse de u, u', les perpendiculaires uS. u'S' (*) sur AC, et uT, u'T' sur AB, on aura

$$AS = AT = CS' = BT' = \frac{1}{2}(AC + AB),$$

$$CS = BT = AS' = AT' = \frac{1}{2}(AC - AB).$$

(20) BP, uS se coupent sur la circonférence ABC. Même propriété pour CQ, uT; BP', u'S'; CQ', u'T'.

(21) Si l'on désigne ces quatre points d'intersection par B_2 . C_2 , B'_2 , C'_2 ,

$$4uS.SB2 = 4uT.TC2
= 4u'S'.S'B'2 = 4u'T'.T'C'2 = AC2 - AB2.
u'B2 = uB'2 = AB,
u'C2 = uC'2 = AC.$$

(23) B₂ et B'₂, aussi bien que C₂ et C'₂, sont symétriquement situés par rapport à O. centre du cercle ABC.

(24) Les points E, E_I. P. Q, aussi bien que les points F, F_I, P, Q, sont concycliques.

Les diamètres de ces deux cercles sont EE_1 , FF_1 ; leurs centres sont S.T.

^(*) Pour ne pas compliquer davantage la figure, ces lignes, et quelques autres parmi celles qui sont indiquées plus 10in, n'ont pas été tracées. Le lecteur les rétablira sans peine.

(25) Les points E_2 , E_3 , P', Q_2 , aussi bien que les points F_2 , F_3 , P' Q', sont concycliques.

Les diamètres de ces deux cercles sont E_2E_3 , F_2F_3 ; leurs centres sont S'. T'.

- (26) Ces quatre cercles sont égaux, et leurs diamètres sont égaux à BC.
- (27) Les deux premiers cercles coupent orthogonalement les cercles I, I_1 : et les autres coupent orthogonalement les cercles I_2 , I_3 .

PROPRIÉTÉS DE TROIS FIGURES ÉGALES Par M. G. Tarry.

Les symétriques d'une même figure par rapport aux côtés d'un triangle sont trois figures égales, cas particulier de trois figures semblables. Les propriétés connues de trois figures semblables donnentimmédiatement les propositions suivantes:

1. — Les symétriques d'une même droite par rapport aux côtés d'un triangle fixe ABC forment un triangle inversement semblable au triangle fixe.

Le triangle des droites symétriques est perspectif avec le triangle ABC; le centre de son cercle inscrit est le centre de perspective.

Le lieu des centres de perspective est la circonférence circonscrite au triangle ABC.

2. — Il existe une infinité de droites dont les symétriques par rapport aux côtés du triangle ABC sont des droites concourantes; leur lieu géométrique est le faisceau des droites qui passent par l'orthocentre de ABC.

Les triples de droites correspondantes tournent autour de trois points fixes A', B', C' de la circonférence circonscrite au triangle ABC, et leur point de concours est sur la même ligne.

3. — Le triangle A'B'U' est inversement semblable au triangle des droites symétriques.

Les points A', B', C' sont les symétriques de l'orthocentre du triangle ABC par rapport aux côtés de ce triangle.

Les droites qui joignent les points A', B', C' à un point quelconque de la circonférence circonscrite au triangle ABC sont les symétriques d'une même droite par rapport aux côtés de ce triangle.

- 4. Les symétriques d'un même point par rapport aux côtés du triangle ABC sont les sommets d'un triangle perspectif avec le triangle A'B'C', et le lieu de leur centre de perspective est la circonférence circonscrite au triangle ABC.
- 5. Le triangle A'B'C' et le triangle ABC sont perspectifs; leur centre de perspective est l'orthocentre du triangle ABC et le centre du cercle inscrit au triangle A'B'C'.
- 6. Il existe une infinité de points dont les symétriques par rapport aux côtés du triangle ABC sont situés en ligne droite, et le lieu de ces points est la circonférence circonscrite au triangle ABC.

La droite qui renferme l'un de ces triples de points correspondants tourne autour du centre de perspective des triangles ABC et A'B'C'.

SUR LES AXES DE ROTATION

Par M. G. Tarry.

Étant données, dans l'espace, deux figures directement égales φ et φ' qui ont un point correspondant commun O, on démontre qu'elles ont un axe de rotation par le raisonnement suivant.

Soient a et b les positions de deux semi-droites menées par le point O dans la figure φ , et a', b' les positions correspondantes de ces semi-droites dans la figure φ' . Traçons les bissectrices a^m et b^m des angles plans aa' et bb'; par a^m menons le plan α perpendiculaire sur aa' et par b^m le plan β perpendiculaire sur bb'. Les deux plans α et β se coupent suivant une certaine droite α passant par le point double O. Les angles α 0 et α 0 et α 0 sont égaux, ainsi que les angles α 0 et α 0, qui ont leurs faces égales chacune à chacune,

sont égaux, et il devient évident que, par une rotation autour de x, a et b arrivent en même temps à coïncider avec a' et b', et cela de façon que la coïncidence se fasse point par point sur chaque rayon.

Cette démonstration n'est pas rigoureuse: par un raisonnement identique, on prouverait que, dans l'espace, tout changement de position d'un système invariable peut être obtenu par un simple mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Piège cinématique, J. E., 1894, p. 196).

Voici la solution exacte.

Supposons d'abord que les plans x et β se confondent en un seul. Les droites a, a' et les droites b, b' sont symétriques par rapport à ce plan, et on voit immédiatement que la droite d'intersection des plans ab et a'b', située dans le plan de symétrie, est un axe de rotation.

Supposons maintenant que les plans α et β ne se confondent pas; ils se couperont suivant une droite x qui passe par le point 0, et les deux angles trièdres xab et xa'b', qui ont leurs faces égales chacune à chacune, seront nécessairement directement ou inversement égaux, suivant les dispositions de ces éléments égaux.

Le plan bissecteur de l'angle dièdre axa' est le plan α . Si les trièdres étaient inversement égaux, ils seraient symétriques par rapport à ce plan bissecteur, puisque la figure symétrique de l'un par rapport à ce plan se confondrait avec l'autre. Par suite, les droites b, b' seraient aussi symétriques par rapport à ce plan. Dès lors, les plans α et β se confondraient, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

D'où l'on conclut que les angles trièdres xab et xa'b' sont directement égaux. (c. Q. F. D.).

De ce théorème, on déduit la conséquence suivante.

Étant donnés deux triangles égaux ABC, A'B'C' dans l'espace, s'îl existe un point O tel que les deux tétraèdres OABC, OA'B'C' soient directement égaux, les plans perpendiculaires aux milieux des droites AA', BB', CC' passent par une même droite.

En effet, les deux figures directement égales déterminées

par les triangles ABC, A'B'C' ayant un point double O, ont une droite double dont tous les points sont des points doubles. Par conséquent, chaque point de cette droite se trouve sur tout plan également distant de deux points correspondants quelconques dans les deux figures, et en particulier sur les plans perpendiculaires aux milieux des droites AA', BB', CC'. Il est évident que la droite double rencontre la droite d'intersection des plans correspondants ABC et A'B'C'.

On voit, en outre, que si les trois plans se coupent en un point unique O. ce point ne pouvant être un point double des deux figures égales ABC et A'B'C', les deux tétraèdres, OABC et OA'B'C', qui ont leurs faces égales. chacune à chacune, sont nécessairement inversement égaux.

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE DE LA CIRCONFÉRENCE Par M. Manuheim.

Sans avoir recours à la trigonométrie, on peut vérifier l'exactitude de la construction donnée,

D page 77, par M. d'Ocagne.

Prolongeons DO jusqu'à sa rencontre en D' avec CA' et appelons E le point où CO coupe l'arc A'B.

Les droites EA', DD' étant parallèles, on a

$$\frac{A'D'}{EO} = \frac{CA'}{CE} \cdot$$

Comme EO = 1, on a

$$CA' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad CE = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \tau.$$

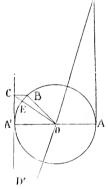
Introduisant ces valeurs dans l'égalité précédente, il vient

e, if vient

$$A'D' = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

C. Q. F. T.

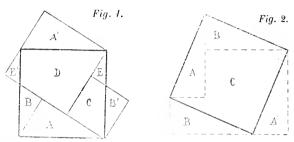
On voit qu'il est inutile de tracer la tangente AD



LA $(n + 1)^{e}$ DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Par M. G. Tarry.

La figure (1), ci-dessous, établit cette démonstration, sans qu'il soit nécessaire de lui ajouter une rédaction, manifestement inutile.



Il existe, comme l'on sait, de nombreuses démonstrations analogues. La plus connue, et peut-être la plus simple, est celle qui est exposée dans le traité de Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, démonstration correspondant à la figure 2.

Toutes ces démonstrations peuvent se résumer ainsi:

On forme un contour polygonal tellement constitué que, en retranchant certaines aires, on trouve le carré de l'hypoténuse et tel, aussi, qu'en retranchant d'autres aires, manifestement égales aux précédentes, on obtient les carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

Cette mé!hode de démonstration conduit donc à découper la figure considérée en morceaux qui, convenablement assemblés, forment, d'une part, les carrés correspondants aux deux autres côtés, et, d'autre part, le carré de l'hypoténuse.

NOTICE HISTORIQUE SUR LA TRIGONOMÉTRIE Par M. Aubry.

La trigonométrie est née des besoins de l'Astronomie: les Chaldéens et les Indiens, qui furent les premiers astronomes, durent être amenés de bonne heure à l'étude des deux trigonométries, mais les rares documents qu'on possède à ce sujet sont peu concluants sur l'étendue de leurs connaissances en trigonométrie. Il pourrait même très bien se faire que leur Astronomie ne fût que la connaissance des périodes des principaux phénomènes astronomiques, - ce qui indique d'ailleurs une fort longue suite d'observations; - et c'est ainsi que les Égyptiens et les premiers astronomes grecs annoncaient les éclipses. Quoi qu'il en soit, le premier ouvrage connu où l'on voit la trigonométrie essayer de se préciser tout à la fois commo but et comme moyens est le traité d'Aristarque de Samos (vers 280) sur les distances comparées de la terre au soleil et à la lune.

Il mesure un angle en le comparant à un signe ou à un angle droit. Remarquant que les rapports des côtés d'un triangle rectangle sont déterminés par ses angles aigus, mais que la géométrie élémentaire ne suffit pas pour déduire ces rapports de ceux-ci, — et que ce problème est probablement du genre incommensurable, de même que ceux de la comparaison de la diagonale du carré au côté et de la circonférence au rayon, problèmes qui avaient déjà passionné les esprits, - l'idée lui vint de chercher deux limites de ce rapport.

La relation trouvée par Aristarque peut s'écrire :

$$\frac{1}{18} > \sin 3^{\circ} > \frac{1}{20}$$

Il la démontre ainsi:

Quand la lune est dichotome, elle est le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle dont les deux autres sommets

sont le soleil et la terre. Il montre que le cercle séparatif de la lumière et de l'ombre est sensiblement un grand cercle.

Soient A, B, C (fig. 1) les centres du soleil, de la terre et de la lune. Aristarque trouve, pour l'angle ABC, la valeur 1de moins un trentième de droit, valeur d'ailleurs fort inexacte. Menons la diagonale

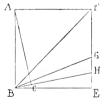


Fig. 1.

BF du carré AE, la bissectrice BG de l'angle FBE. On a

$$\frac{\rm EG}{\rm EH} > \frac{\rm EBG}{\rm DBE} = \frac{15}{2},$$

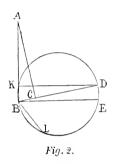
$$\begin{split} \frac{FG^2}{EG^2} &= \frac{BF^2}{BE^2} = \ 2 \ > \frac{49}{25}, \\ \frac{GF}{FG} &> \frac{7}{5} \end{split}$$

d'où

et par suite

(
$$\beta$$
) $\frac{\text{EF}}{\text{EG}} = \frac{\text{GF} + \text{EG}}{\text{EG}} > \frac{7+5}{7} = \frac{12}{5}$.

De (a) et (b) on conclut $\frac{EF}{EH} > 18$, donc BH > BE > 18. EH,



et comme on a

$$\frac{BH}{EH} = \frac{AB}{BC},$$

il vient AB > 18.BC.

Maintenant, menons BD = BA (fig. 2) et la circonférence de diamètre BD, coupée en K par AB; puis l'arc BL égal au sixième de la circonférence. On a

 $10 = \frac{\text{arc BL}}{\text{arc BK}} > \frac{\text{BL}}{\text{BK}},$

d'où

10.BK > BL =
$$\frac{BD}{2}$$
;

or

$$\frac{BD}{BK} = \frac{AB}{BC}$$
, donc AB < 20.BC.

On doit donc à Aristarque de Samos l'idée de la considération du sinus, de la corde et de la tangente pour définir un angle. Il a compris que ces fonctions sont bien déterminées, a donné la relation

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{tg \alpha}{tg \beta}$$

pour $\,\alpha>\beta$, et esquissé une méthode de calcul des grandeurs incommensurables.

Ces remarques ont eu l'effet le plus heureux sur les progrès de la géométrie de la mesure et paraissent avoir inspiré Archimède dans plusieurs de ses découvertes.

Archimède, en quelques endroits de ses écrits, définit aussi un angle par son sinus ou sa tangente. Dans l'admirable traité qu'il a écrit sur la mesure de la sphère, il pose comme axiome que, de deux lignes ayant mêmes extrémités et concaves du même côté, la plus courte se trouve du côté de la concavité, d'où il suit que la circonférence est plus grande qu'un

polygone quelconque qui lui est inscrit et plus petite qu'un polygone circonscrit. Cette proposition équivaut à la relation

$$\sin \alpha < \alpha < tg \alpha$$

qu'il paraît impossible de démontrer sans pétition de principe.

Le même traité d'Archimède donne une sommation curieuse

donne une sommation curieuse de cordes correspondant à des arcs circulaires croissant en

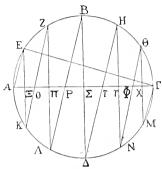


Fig. 3.

progression arithmétique. Soit un polygone d'un nombre pair de côtés (fig. 3); joignons les sommets perpendiculairement à un même diamètre, on aura

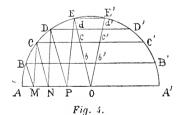
$$EK + ZL + BD + HN + OM = \frac{GE.AG}{EA}$$

ce qui résulte de la considération des triangles semblables AEX, XKO, ZOP, PLR, etc. (*). Archimède montre aussi

On a donné une autre démonstration du développement de $\Sigma \sin na$

en s'appuyant sur le théorème de Carnot, relatif aux projections d'un contour fermé (Mathesis, 1893).

C'est à Euler qu'on doit l'expression analytique de \(\Sin \) sin na et \(\Sin \) cos na. Dans son Intr. in. anat. inf., il la trouve de deux manières : d'abord, en transformant les termes en exponentielles imaginaires, ce qui ramène à la sommation d'une progression géométrique; ensuite, en



remarquant que la suite des sinus et des cosinus d'arcs en progression arithmétique est une série récurrente dont l'échelle de relation est : 2 cos a, — I, ce qui donne la démonstration habituellement exposée aujourd'hui.

^(*) Dans les exercices des Nouv. Ann. math. de 1842, Lecointe a proposé la question suivante: une demi-circonférence étant divisée en un nombre impair de parties égales, on joint les deux divisions du milieu au centre. La somme des parties des cordes parallèles au diamètre menées par les points de la division et comprises dans l'angle dont il vient d'être parlé est égale au rayon. La figure 4, qui donne la démonstration de ce théorème, montre comment il se rattache à celui d'Archimède.

à effectuer la même sommation en s'arrêtant à une corde donnée.

On doit une mention à Erathosthène (vers 200), qui a émis les premières idées sur les cartes géographiques partielles, et imaginé la division de la circonférence en soixante parties.

C'est à l'illustre astronome Hipparque (vers 440) qu'on est redevable des premiers éléments des deux trigonométries, et de l'idée fortingénieuse d'une table des valeurs trigonométriques: il avait calculé en effet une table de cordes. Ses ouvrages sont perdus, mais ses procédés sont probablement ceux que Ptolémée enseigne dans son Almageste, et que nous indiquerons plus loin. C'est Hipparque qui a proposé le partage de la circonférence en 360 parties, et imaginé la projection stéréographique.

Théodose (commencement de notre ère), Ménélaus (milieu du 1^{er} siècle), Ptolémée (vers 130), Pappus (1ve siècle), et plusieurs autres Anciens ont successivement amélioré la trigonométrie sphérique. Le célèbre théorème du second était étendu à la sphère et utilisé dans ce but. Mais les démonstrations et les calculs trigonométriques sont restés longtemps longs et pénibles, par suite du défaut de méthodes générales.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par Aug. Boutin.

384. — L'identité :

 $(q^2+ap^2)^4=16ap^2q^2(q^2-ap^2)^2+(q^4-6ap^2q^2+a^2p^4)^2$ fournit toutes les solutions de l'équation :

$$x^4 = ay^2 + z^2.$$

385. — On considère la suite récurrente :

$$u_0 = 1$$
, $u_1 = 1 + x$, $u_2 = 2x + x^2$... $u_n = (1 + x)u_{n-1} - u_{n-2}$.

Calculer un en fonction de x.

On trouve:

$$u_n = x^n + nx^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-12)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} + \dots$$

La fonction u_n satisfait à l'équation différentielle du second ordre:

$$(x^2 + 2x - 3)\frac{d^2u_n}{dx^2} + 3(n+1)\frac{du_n}{dx} - n(n+2)u_n = 0.$$

D'où, pour calculer A_p (coefficient de x^{n-p}), la formule de récurrence: $pA_p(2n-p+2)-(2n-2p+3)(n-p+1)A_{p-1} + 3(n-p+2)(n-p+1)A_{p-2} = 0$.

386. — Plus généralement, calculer u_n , sachant que $u_0 = 1$, $u_1 = x + a$... $u_n = (x + a)u_{n-1} \pm u_{n-2}$. On trouve:

$$u_n = x^n + nax^{n-1} + \dots$$

Ces polynomes satisfont aux équations différentielles du second ordre :

$$[(x+a)^2 \pm 4] \frac{d^2 u_n}{dx^2} + 3(x+a) \frac{du_n}{dx} - n(n+2) u_n = 0.$$

D'où, pour calculer A_p , coefficient de x^{n-p} , la formule de récurrence : $p(p-2n-2)A_p + aA_{p-1}(n-p+1)(2n-2p+3) + (a^2 \pm 4)(n-p+2)(n-p+1)A_{n-2} = 0.$

Dans la formule précédente, pour a = 0, on a:

$$u_n = x^n + (n-1)x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}x^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-6} + \cdots$$

qui satisfait à l'équation différentielle :

$$(x^2 + 4)u_n'' + 3xu_n' - n(n+2)u_n = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport à x.

BACCALAURÉATS

Académie de Paris.

(Session d'avril 1895.)

BACCALAUREAT CLASSIQUE (LETTRES-MATHEMATIQUES)

I. Problème obligatoire:

Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône, connaissant sa hauteur h. et sachant:

1º Que sa surface latérale est égale à la somme des surfaces des bases;

 2° Que son volume est équivalent à six fois le volume d'une sphère de diamètre h.

- II. Trois questions à choisir :
- a) Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro.
- b) Calculer $\sin x$ connaissant $\tan g \frac{x}{2}$.
- c) Résoudre un triangle connaissant b, c et A.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

1° On considère sur une sphère de centre O, deux petits cercles AA', BB', dont les plans sont parallèles et qui ont pour pôle commun le point M, et l'on demande de calculer l'angle BOM = x, connaissant l'angle $AOB = \alpha$ et le rapport m de la calotte sphérique AMA' à la calotte sphérique BMB'.

2º Démontrer que deux pyramides qui ont des bases équivalentes et la même hauteur sont équivalentes.

QUESTION 497

Solution par M. Antoine.-C. Davidoglou, élève au lycée de Berlad.

La fonction

$$\begin{array}{l} 2[a^2x^2(y^2-b^2)^2+b^2y^2(x^2-a^2)^2]^3 \\ -(a^2y^2+b^2x^2)^2[a^2x^2(y^2-b^2)^2-b^3y^2(x^2-a^2)^2]^2 \end{array}$$

est divisible par les deux polynomes

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2a^2b^2$$
, $2x^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2$.
Le vérifier et trouver le quotient. (E.-N. Barisien.)

Posons:

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2a^2b^2 = m,$$

$$(2) 2x^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2 = n.$$

Alors $2(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = n - m$ et le produit de (1) par (2) devient:

(3)
$$a^2x^2(y^2-b^2)^2+b^2y^2(x^2-a^2)^2=\frac{m(m+n)}{2}-a^2b^2(n-m)$$
.

De (3) on tire encore:

$$(4) \quad \left[a^2x^2(y^2-b^2)^2-b^2y^2(x^2-a^2)^2\right]^2=\frac{(m+n)^2}{2}\left[\frac{m^2}{2}-a^2b^2(n-m)\right]\cdot$$

Si l'on transporte dans l'expression donnée les valeurs (1), (3), (4) et que l'on range les termes suivant les puissances décroissantes du produit ab, on trouve:

$$F(x, y) = mn \begin{bmatrix} 8a^{6}b^{6}(n-m) + a^{4}b^{4}(m+n)(5n-7m) \\ -a^{2}b^{2}m(m+n)^{2} + \frac{m^{2}(m+n)^{2}}{4} \end{bmatrix}.$$
C. Q. F. D.

QUESTION 516

Solution par M. Autoine.-C. Davidoglou, élève au lycée de Berlad.

Résoudre et discuter l'équation:

$$x^{2}(y^{2} - 8ay + 18a^{2}) + 3ax(y^{2} - 8ay + 9a^{2}) + 9a^{2}(y^{2} - 2ay) = 0.$$
 (Lauvernay).

Cette équation du second degré en x a pour discriminant, tous calculs faits,

$$\rho = 27a^2(y + a)(3a - y)^3$$
.

Si S et P représentent respectivement x' + x'', x'x'', on a:

$$S = -\frac{3a}{y^2 - 8ay + 18a^2} \cdot [y - a(4 - \sqrt{7})][y - a(4 + \sqrt{7})].$$

$$P = \frac{9a^2}{y^2 - 8ay + 18a^2} y[y - 2a].$$

Comme le trinome $y^2 - 8ay + 18a^2$ est toujours positif, les valeurs remarquables de y sont:

$$-a$$
, $3a$, $a(4-\sqrt{7})$, $a(4+\sqrt{7})$, o, $2a$, qui se classent:

$$-a < o < a(4 - \sqrt{7}) < 2a < 3a < a(4 + \sqrt{7}),$$
 si $a > o$; et inversement, si $a < o$.

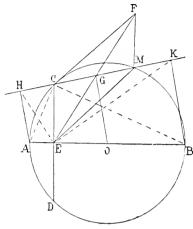
La discussion se fait alors facilement dans les deux cas.

QUESTION 579

Solution par M. Goyens, à Malines.

On donne une circonférence de diamètre AB, une corde CD perpendiculaire en E à ce diamètre, et un point M de la circonférence. On achève le parallélogramme MECF ayant pour centre le point C, et on projette A et B sur la diagonale MC, en H et K. Démontrer que GH = GK = GE. (L. Lévy.)

AHKB est un trapèze, O est le milieu de AB et OG est



parallèle aux bases, donc passe par le milieu G de HK; donc GH = GK.

Les quadrilatères AHCE, ECKB sont inscriptibles; donc l'angle CHE = l'angle CAE, et l'angle CKE = l'angle CBE; par conséquent CHE + CKE = CAE + CBE = 90°.

Le triangle HEK est donc rectangle, et la droite EG, qui joint le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse vaut la

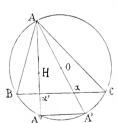
moitié de celle-ci; donc EG = GH = GK.

Nota. — Solutions diverses par MM. Vazou, Droz-Farny, Davidoglou, Alfred Champion, Georges Rodrigez, étudiant à Medellin (Colombie) et \mathbf{M}^{me} V* Prime.

QUESTION 581

Solution par M. Aletrop, à Madrid.

Si AA', BB', CC', diamètres de la circonférence circonscrute au triangle ABC, rencontrent les côtés correspondants BC, CA, AB en α , β , γ , la somme algébrique des trois rapports $\frac{\alpha A'}{A\alpha}$, $\frac{\beta B'}{B\beta}$,



$$\frac{\gamma C'}{C_{2'}}$$
 est l'unité. (E. Lauvernay.)

Soit O le centre du cercle circonscrit. En observant que $\alpha A' = OA' - O\alpha$ $= OA - O\alpha$, on a

$$\begin{split} \frac{\alpha A'}{Az} + \frac{\beta B'}{B\beta} + \frac{\gamma C'}{C\gamma} &= \frac{OA}{Az} + \frac{OB}{B\beta} + \frac{OC}{C\gamma} \\ &= \left(\frac{Oz}{Az} + \frac{O\beta}{B\beta} + \frac{O\gamma}{C\gamma}\right). \end{split}$$

Or, la somme des trois premiers rapports et celle des trois

autres sont respectivement égales à 2 et 1, d'après les théorèmes d'Euler et de Gergonne; la différence est donc égale à 1 (*).

Autrement (cette solution est de M^{me} V^e Prime et de M. Droz-Farny). — Menons la hauteur AA" qui coupe BC, en z'; la circonférence, en A"; si H est l'orthocentre, on sait que

On a donc
$$\sum \frac{\alpha A'}{A \alpha} = \sum \frac{\alpha' A''}{A \alpha'} = \sum \frac{\alpha' H}{A \alpha'}$$

Mais, d'après un théorème connu,

$$\sum \frac{\alpha' H}{A \alpha'} = 1,$$

$$\sum \frac{\alpha A'}{A \alpha} = 1.$$

done aussi

Nota. — Nous avons recu des solutions diverses, notamment des solutions trigonométriques de MM. Vazou; Jean Négretzu, élève à la faculté de Bucarest; Davidoglou; Droz-Farny et Alfred Champion.

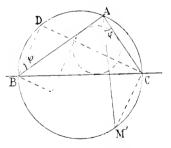
OUESTION 582

Solution par A. Droz-Farny.

On mène une tangente quelconque au cercle inscrit à un triangle rectangle en A; si φ désigne l'angle de cette tangente avec le côté AB, on mène par A la droite AM telle que l'angle CAM soit

égal à ç. Trouver le lieu du point M tel que la distance AM soit égale à la somme des distances des extrémités de l'hypoténuse BC à la tangente variable. (E. Lauvernay.)

Menons par B une parallèle BT à la tangente variable et abaissons sur cette droite la perpendiculaire CL; on aura évidemment CL = AM. Le point



L appartient à la circonférence circonscrite au triangle ABC.

^(*) Nous dirons, à cette occasion, que le théorème de Gergonne, quoique trouvé directement par lui (Voir Annales de Gergonne, t. 1X, p. 277), n'est qu'une conséquence immédiate du théorème d'Euler.

Menons la droite AM qui fait avec AC un angle variable 9: cette droite coupe la circonférence circonscrite en M'; on a

$$M'C = AL$$
, $\widehat{LCA} = \widehat{ABL} = \widehat{CAM'}$, $\widehat{AM'C} = \widehat{ALC}$.

Le triangle ACM est donc égal au triangle CAL, par couséquent, AM' = CL. Le point M' coïncide donc avec M et le lieu cherché est la circonférence circonscrite au triangle ABC.

Nota. — Autre solution par M. Alfred Champion.

OUESTION 583

Solution par M. Alfred CHAMPION.

En appelant dans un triangle ABC, a, b, c R, r, r_a, r_b, r_c, les côtés, le rayon du cercle circonscrit et les rayons des cercles tangents aux trois côtés, démontrer que l'on a

$$a(b + c) = (r - r_a)(4R + r - r_a);$$

en déduire immédiatement

a (b - c) =
$$(r_b - r_c)(4R - r_b - r_c)$$
.
(E. Lemoine.)

L'expression A = a(b + c) se transforme successivement de la manière suivante :

de la manière suivante :
$$A = \frac{a(b+c)[(b+c)^2-a^2]}{(b+c+a)(b+c-a)} = \frac{a(b+c)[(b-c)^2+4bc-a^2]}{2p \cdot 2(p-a)}$$

$$= \frac{a(b+c)[(b+c-a)^2]}{2p \cdot 2(p-a)} = \frac{a(b+c)[(b+c)(a+b-c)(a+c-b)]}{2p \cdot 2(p-a)} = \frac{a(b+c)[(a+b-c)(a+b-c)(a+c-b)]}{2p \cdot 2(p-a)} = \frac{a(b+c)[(a+b-c)(a+b-c)(a+c-b)]}{2p \cdot 2(p-a)} = \frac{a(b+c)[(a+b-c)(a+b-c)(a+c-b)]}{p(p-a)} = \frac{abc(2p-a)(2p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)} = \frac{abc(2p-a)}{p(p-a)} + \frac{(p-b)(p-c)(a^2-2ap)}{p(p-a)} = \frac{abc\cdot p}{p(p-a)} + \frac{abc\cdot p}{p$$

En appliquant des formules bien connues, on a

$$A = 4Rr_a + 4Rr + r^2 - r_a^2,$$

ou, finalement,

$$a(b+c) = 4R(r_a+r) + (r+r_a)(r-r_a) = (r+r_a)(4R+r-r_a).$$

Par analogie, on écrit immédiatement :

$$b(c + a) = (r + r_b)(4R + r - r_b) = 4Rr + 4Rr_b + r^2 - r_b^2.$$

$$c(a + b) = (r + r_c)(4R + r - r_c) = 4Rr + 4Rr_c + r^2 - r_c^2.$$
Retranchant

$$a(b-c) = 4R(r_b - r_c) - (r_b^2 - r_c^2)$$

$$= 4R(r_b - r_c) - (r_b - r_c)(r_b + r_c)$$

$$= r_b - r_c)(4R - r_b - r_c).$$
C. Q. F. D.

Seconde solution (*).

On sait que
$$4R + r - r_a = r_b + r_c$$
.
Or $r + r_a = \frac{S}{p} + \frac{S}{p-a} = \frac{S(b+c)}{p(p-a)}$, $r_b + r_c = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{Sa}{(p-b)(p-c)}$ $(r + r_a)(4R + r - r_a) = \frac{S^2a(b+c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = a(b+c)$.

Effectuons une transformation continue en B; il suffira de remplacer

$$a, b, c, R, r, r_a, r_b, r_c$$

respectivement par

$$-a, b, -c, -R, r_b, -r_c, r, -r_a$$
on aura
$$-a(b-c) = (r_b - r_c)(-4R + r_b + r_c)$$
ou
$$a(b-c) = (r_b - r_c)(4R - r_b - r_c).$$

Nota. — Solutions diverses par MM. Govens, à Malines; Jean Negretzu, à Bucarest et Davidoglou.

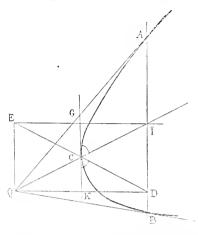
QUESTION 584

Solution par M. VAZOU.

Soit AB une corde d'une parabole P. On projette le pôle de AB sur AB en D, et sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB, en E. Démontrer que DE passe par le foyer de P. (G. L.)

^(*) Cette solution est de M. Droz-Farny.

La diagonale QI du rectangle DQEI qui joint le pôle Q de



AB au milieu I de la corde AB est parallèle à l'axe de la parabole; d'autre part, on sait que le milieu C de la droite QT, point de rencontre des diagonales du rectangle, se trouve sur la parabole P et que la tangente IK à la parabole en ce point est parallèle à AB; d'ailleurs, par raison de symétrie l'angle KCD est égal à l'angle GCI, par conséquent la

droite CD qui fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe CI et avec la tangente CK passe par le foyer de la parabole.

Nota. — Autres solutions par MM. Droz-Farny; Davidoglou; G. Tiztzeica, et $\mathrm{M^{me}}\ \mathrm{V^e}\ \mathrm{F}.$ Prime.

QUESTION 585

Solution par M. A. Droz-Farny.

On considère deux cercles O et O'. Soit A le point de rencontre de deux tangentes communes d'espèces différentes: on projette ce point en a sur OO',

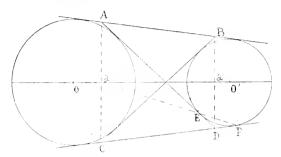
4º Le point a a même polaire par rapport aux cercles 0 et 0'; cette polaire passe par deux autres points tels que A;

2º Le point a est à l'intersection de droites de contact sur O et O' de tangentes communes d'espèces différentes. (E. Foucart.)

Soient A,B,C,D les sommets du quadrilatère circonscrit aux cercles O et O'. On sait que, dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, les deux diagonales AC et BD et la droite OO' qui joint les points de concours des côtés opposés (ici les deux centres de similitude) forment un triangle autopolaire par rapport à la conique.

Le quadrilatère ABCD étant circonscrit aux deux cercles,

le triangle en question est conjugué par rapport aux deux cercles, d'où le théorème.



La droite EF, qui joint deux points de contact sur O' de tangentes d'espèces différentes, étant polaire du point D, passe évidemment par le pôle a de la droite BD.

Remarque. — La figure proposée jouit encore de la propriété suivante, facile à démontrer :

Le quadrilatère ABCD est inscriptible à une circonférence concentrique à celles qui passent par les points de contact des tangentes intérieures et par ceux des tangentes extérieures.

En représentant 00' par d, les rayons sont respectivement:

$$\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + 4RR'}$$
; $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4RR'}$; $\frac{1}{2}d$.

Nota. — Solutions diverses par M " V F. PRIME et M. DAVIDOGLOU.

QUESTIONS PROPOSÉES (*)

627. — Soient :

 $O,\,O_a,\,O_B,\,O_c,\,\,$ le cercle inscrit et les cercles exinscrits à un triangle ABC,

I, le centre radical des cercles O_A, O_B, O_C,

 $I_{\scriptscriptstyle A},$ le centre radical des cercles $\rm~O,~O_{\scriptscriptstyle B},~O_{\scriptscriptstyle C},$

 I_B , le centre radical des cercles O, O_A, O_C ,

 I_c , le centre radical des cercles O, O_a, O_g .

^(*) Je prie les correspondants que ces questions intéressent de vouloir bien m'adresser le plus rapidement possible, après l'apparition du numéro, les solutions des questions proposées. De cette façon, les solutions seront publiées peu de temps après la position de la question.

G. L.

Montrer que:

1º Le triangle $I_AI_BI_c$ est semblable au triangle formé par les centres des cercles O_A . O_B . O_c . et le rapport de similitude de ces deux triangles est $\frac{1}{2}$.

2º Le point I est le point de rencontre des hauteurs du triangle I_AI_BI_C. (E.-N. Barisien.)

628. — On donne sur une circonférence: l° deux points A, B et leurs symétriques A', B' par rapport à un diamètre; 2° une droite CD, perpendiculaire à ce diamètre. On joint A et B à un point quelconque M de la circonférence; BM rencontre CD, en E; AM rencontre CD, en G.

Démontrer que les droites B'G, A'E se coupent sur la circonférence.

(Alfred Champion.)

629. — Soit BAC un triangle isoscèle (AB = AC); aux points B. C on élève aux côtés BA, CA des perpendiculaires qui se coupent en D. Soit M un point arbitrairement choisi sur la base BC; par M, on mène des parallèles aux côtés AB, AC et aux droites BD, CD. On forme ainsi deux parallèlogrammes MAPQ. MDRS.

Démontrer: 1º Que PQ. RS se coupent sur BC;

 2° Que les droites : AM, RS, d'une part; DM, PQ, d'autre part, sont rectangulaires. (G. L.)

- 630. On considère une circonférence Γ et un point A, fixe. Soit M un point mobile sur Γ ; la tangente en M rencontre la perpendiculaire élevée au milieu de AM en un point I dont on demande le lieu géomérique. (G. L.)
- 631. Autour d'un point A, on fait tourner une transversale qui coupe une circonférence Γ aux points M, M'; soient ω , ω' les centres des circonférences qui, passant par A, touchent Γ . respectivement aux points M, M'.

1º Trouver le lieu du point de rencontre des droites MM' $\omega\omega'$:

2º Démontrer que

 $\operatorname{arc} AM + \operatorname{arc} AM' = \operatorname{arc} MM'.$ (G. L.)

632. — On considère une circonférence Γ et un point Λ . Démontrer que, à ce point Λ , correspond une droite α telle que le rapport $\frac{\overline{M}\overline{\Lambda}^2}{\overline{M}\overline{H}}$ reste constant. \overline{M} désignant un point quelconque de Γ , $\overline{M}\overline{H}$ étant la distance de \overline{M} à la droite α . (G. L.)

633. — On donne une circonférence de cercle, la tangente en m à cette courbe, et deux points a, b sur cette droite. Les droites qui joignent un point quelconque c de la circonférence aux points a et b rencontrent de nouveau la circonférence en p et q: démontrer que les droites mp, mq interceptent, sur une parallèle à la tangente donnée, un segment qui est de grandeur constante, quelle que soit la position de c sur la circonférence. (Mannheim.)

634. — On donne les trois points a, b, c sur une droite. Quel est le lieu d'un point m, tel que

$$\frac{1}{\operatorname{tg} bma} + \frac{1}{\operatorname{tg} cmb} = \text{const.}$$
(Mannheim.)

635. — Soient A', B', C' les points de rencontre de la droite Δ qui passe par les deux points de Brocard d'un triangle ABC avec les côtés de ce même triangle; désignons, par α , β , γ , les distances algébriques des points A', B', C' au premier point de Brocard et par p_a , p_b , p_c les distances algébriques des sommets du triangle à Δ . On a la relation

$$\frac{a^2}{b^2} \left[\frac{\mathbf{1}}{\alpha \cdot p_a} - \frac{\mathbf{1}}{\beta \cdot p_b} \right] + \frac{b^2}{c^2} \left[\frac{\mathbf{1}}{\beta \cdot p_b} - \frac{\mathbf{1}}{\gamma \cdot p_c} \right] + \frac{c^2}{a^2} \left[\frac{\mathbf{1}}{\gamma \cdot p_c} - \frac{\mathbf{1}}{\alpha \cdot p_a} \right] = \mathbf{0}.$$
(Louis Bénézech.)

636. — On donne deux points tixes A et B. 1º Déterminer sur une droite AX, menée par A, deux points C, D tels que $BC \times BD$ ait une valeur donnée m^2 et qu'en même temps AB soit la bissectrice extérieure de l'angle CBD. 2º Quel est le lieu des points C et D lorsque AX tourne autour de A?

Mêmes questions en supposant que AB doive être la bissectrice intérieure de l'angle CBD. (Bernés.) 637. — On donne un angle A et, sur l'un des côtés, un point fixe B. Lieu de M tel que le rayon qui passe par B dans le cercle ABM fasse un angle donné α avec l'isogonale AX de AM relativement à l'angle A. Cas où α est droit.

(Bernès.)

- 638. Dans l'angle A d'un triangle ABC on trace deux droites isogonales variables dont l'une rencontre BC en M; trouver le lieu du point P où l'autre droite est rencontrée par le rayon B_{ω} du cercle ABM. (Bernès.)
- 639. Dans l'angle A d'un triangle ABC on trace deux isogonales variables dont l'une rencontre en M la circonférence ABC. Trouver le lieu du point P où l'autre droite est rencontrée par la circonférence qui, passant par A et B, a son centre sur BM.

 (Bernès.)
- 640. Par le milieu C d'une corde fixe AB d'un cercle O on trace de part et d'autre de CA deux rayons vecteurs CM, Cm également inclinés sur CA. 1º Démontrer que la corde Mm passe par un point fixe Q, et que les cercles QCM, QCm sont orthogonaux au cercle O. 2º Lieu du centre du cercle CMm.

 (Bernès.)
- **641.** Dans un quadrilatère ABCD, AC, BD se coupent en M, AD, BC en P, AB, CD en Q. 1º Montrer qu'il y a, sur chaque côté du triangle MPQ, sur MP par exemple, un point q, et un seul, tel que ce côté soit bissectrice intérieure ou extérieure de chacun des angles AqB, CqD sous lesquels, de q, on voit les côtés qui passent par Q. 2º Dans le cas où ABCD est inscriptible, faire voir que les quadrilatères ADMq, BCMq, BDPq, CAPq sont aussi inscriptibles et que qA.qB = qC.qD = qM.qP. (Bernès.)

Erratum. — Page 96, il faut renverser le deuxième rapport de la dernière ligne.

Le Directeur Gérant, G. DE LONGCHAMPS.

LA TRANSFORMATION DE BOSCOVICH

Par M. E.-M. Laugley, M. A., professeur de mathématiques, Bedford (Angleterre).

Dans la Mathematical Gazette (avril 1894), M. Langley (le rédacteur) donne un intéressant aperçu d'un cercle signalé pour la première fois par Boscovich (*), et appelé quelquefois le cercle excentrique. Dans le même recueil (décembre 1894), M. Langley montre comment on peut exposer la méthode de Boscovich, en la présentant comme une introduction aux transformations générales. Nous reproduisons ici les parties principales de son article (**).

1. Définition. — Soient AB (fig. 1) une droite fixe, S et O deux points fixes, SP et OQ un couple quelconque de parallèles passant par S et O. Si OP, SQ se coupent sur AB, on dit que les points P et Q se correspondent.

Si Z est le point d'intersection de OP, SQ, on a SP:OQ=SZ:QZ.

Donc, si Q devient infiniment voisin de AB, le point P s'éloigne à l'infini.

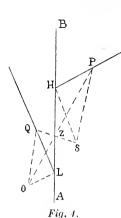
En raison de cette propriété, AB est appelée la droite de fuite.

2. Théorème. — Si P décrit une droite PH rencontrant la droite de fuite AB en H, Q décrit une droite LQ, parallèle à SH.

Par O menons une parallèle à PH (fig. 1). Si L est son point de concours avec AB, L est un point fixe. Joignons LQ.

^(*) Elementa Universæ Matheseos, tome III, Rome, 1754.

^(**) Nous devons cette traduction à l'obligeance de M. Mackay, professeur à Edimbourg; nous lui adressons ici, à ce propos, tous nos remerciements. |G,L|



De la similitude des triangles OLZ, OZQ aux triangles PHZ, PZS, on déduit:

LZ : ZO = HZ : ZP

ZO : ZQ = ZP : ZS

d'où LZ : ZQ = HZ : ZS.

Et comme $\widehat{LZQ} = \widehat{HZS}$, on a $\widehat{ZLQ} = \widehat{ZHS}$.

Par conséquent, Q appartient à une droite fixe LQ, parallèle à SH.

De là on tire cette conclusion:

Des droites qui se correspondent sont telles que chacune est le lieu d'un point qui correspond à un point sur l'autre.

3. — 1º Au lieu de suivre la marche ci-dessus, il est évident que l'on pourrait d'abord donner la définition suivante des droites correspondantes :

Soient AB une droite fixe, O et S deux points fixes quelconques, HP, LQ deux droites quelconques menées des points H et L sur AB, et parallèles à OL, SH; les droites HP, LQ sont correspondantes.

(2º) Ensuite, on pourrait établir le théorème suivant:

Lorsqu'une droite PH passe par un point fixe P, la droite correspondante LQ passera par un point fixe Q tel que SP et OQ sont parallèles.

(3°) Enfin, on pourrait définir des points correspondants comme les points d'intersection des droites correspondantes.

Le procédé pour déduire, d'une droite donnée PH, la correspondante LQ, est appelé réversion; pour distinguer entre la droite originale PH et la droite dérivée LQ, on appelle LQ le revers de PH, et PH l'obvers de LQ. On doit observer que ce rapport n'est pas strictement réciproque, sauf quand O et S coïncident.

4. — Un angle donné peut par réversion devenir un angle d'une grandeur donnée quelconque.

Soient a, b les points où les côtés CB, CA (fig. 2) de l'angle donné BCA rencontrent la droite de fuite, et soit S un point quelconque sur l'arc aSb capable de l'angle donné.

Par O, traçons les parallèles à aC, bC jusqu'à leur rencontre avec la droite de fuite en a', b'. Par a', b' traçons a'C', b'C' parallèles à Sa, Sb.

L'angle a'C'b', qui est le revers de l'angle aCb, aura la grandeur donnée.

5. — Un triangle donné peut par réversion devenir un triangle équilatéral.

Soient a, b, c (fig. 2) les points où les côtés BC, CA, AB

du triangle donné rencontrent la droite de fuite. Soit S le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux sur ab, bc.

Par O, traçons les parallèles à BC, CA, AB jusqu'à leur rencontre avec la droite de fuite en a', b', c'. Par a', b', c' traçons B'C', C'A', A'B' parallèles à Sa, Sb, Sc.

Le triangle A'B'C', qui est le revers du triangle ABC, sera équilatéral.

6. — Un quadrilatère peut
par réversion devenir : 1° un
parullélogramme; 2° un rectangle; 3° un carré.

a C B

1º Soit E l'intersection des droites AB, CD; F celle de BC, DA.

Pour toutes les positions de S, le revers du quadrilatère est un parallélogramme, si par réversion EF passe à l'infini.

2º Si S est un point quelconque sur la circonférence qui a EF pour diamètre, le revers du quadrilatère sera un rectangle.

3º Si les diagonales AC, DB coupent EF en H, K, et si S est un des points d'intersection des cercles de diamètres EF, HK, les diagonales, aussi bien que les côtés adjacents, du revers du quadrilatère seront rectangulaires.

7. — Les tangentes subissent réversion en tangentes.

Par conséquent, toutes les propriétés de pôles et de polaires peuvent subir réversion.

8. — Le rapport anharmonique d'un faisceau se conserve après réversion.

Si les rayons d'un faisceau dont le centre est P rencontrent la droite de fuite en a, b, c, d, et les rayons correspondants menés par Q, le revers du point P, rencontrent la droite de fuite en a', b', c', d', on a

$$Q(a'b'c'd') = S(abcd),$$

= $P(abcd).$

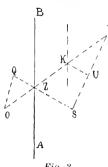
9. — De là on déduit la propriété anharmonique d'une conique.

Si l'on prend S pour foyer, et la directrice pour droite de fuite, une conique peut par réversion devenir un cercle.

Par suite aussi, une conique peut par réversion devenir une conique.

10.—Si l'on prend la polaire de S pour droite de fuite, une conique subit réversion en une conique dont le centre est O.

LA LIAISON ENTRE LA RÉVERSION ET LA PROJECTION PERSPECTIVE



Du côté de la droite de fuite AB (fig. 3), opposé à O, et à une distance égale, menons une droite parallèle à AB. Si OP coupe cette parallèle en K, et si KU, menée parallèleà SQ, coupe SP en U, nous aurons

$$SU: SP = ZK: ZP$$

= $OZ: ZP$
= $OQ: SP;$
 $SU = OO.$

Fig. 3. Par conséquent, le lieu de U est une courbe égale à celle décrite par le point Q.

de

Mais U est la projection perspective de P, S étant le centre et HK l'axe de perspective.

Si O et S coïncident, alors la transformation de Boscovich sera absolument identique avec la projection perspective. Il faut seulement choisir l'axe de perspective du côté de la droite de fuite opposé au centre S et également éloigné.

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE

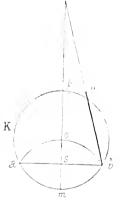
DU CERCLE

M. Ant. Pleskot, professeur à l'École réale tchèque (de Prague).

Dans le numéro d'avril du Journal, M. d'Ocagne expose une rectification approchée du cercle, qui s'obtient en construisant géométriquement $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et en ajoutant les segments ainsi obtenus. L'erreur de cette construction est, environ, les cinq

millièmes du rayon, pour la dernière circonférence. J'ai trouvé et publié dans le Cåsopis pro pèsování mathematiky a fysieky, une construction très simple; l'erreur, dans cette construction, est plus faible que les deux dix-millièmes, dans les mêmes conditions.

Soit K le cercle de centre O et de rayon r = 1. De l'extrémité m d'un diamètre quelconque, traçons un cercle de rayon r, coupant le cercle K aux points a, b. Du point s, qui est le point d'intersection de la droite ab et du diamètre km, prenons sur le dia-



mètre sl = 2ab; et sur lb prenons lv = 2r. La longueur

de la droite vb donne approximativement la valeur $\frac{\pi}{2}$.

 $D\'{e}monstration:$

$$\overline{sb} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad s\overline{l} = 2\sqrt{3};$$

donc
$$\overline{lb} = \sqrt{\overline{sb}^2 + \overline{sl}^2} = \frac{\sqrt{51}}{2},$$
 et, par suite, $\overline{vb} = \frac{\sqrt{51}}{2} - 2;$ ou $2.\overline{vb} = \sqrt{51} - 4 = 3,1414284...$ or, $\pi = 3,1415926...$ finalement $\pi - 2\overline{vb} < 0,0001642.$

NOTICE HISTORIQUE SUR LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. Aubry.

(Suite, voir page 105.)

L'Almageste de Ptolémée contient la solution de beaucoup de problèmes particuliers et une table de cordes pour tous les arcs de la circonférence de trente en trente minutes, avec les trentièmes des différences, pour l'interpolation. Il divise, comme aujourd'hui, la circonférence en trois cent soixante parties, celles-ci en soixante minutes, etc. Les fractions décimales n'étaient pas encore inventées; il emploie également des divisions sexagésimales pour les longueurs, et leur donne les mêmes noms: le demi-diamètre est divisé en soixante parties, etc. (*). Ainsi la corde correspondant à l'arc de 45' est

$$47'8''$$
, ou $\frac{47}{3600} + \frac{8}{216000}$ du rayon.

Il n'emploie pas les sinus, mais les cordes, et résout les triangles en les décomposant en triangles rectangles; chaque question nécessite une solution particulière. Quant à la manière dont il constitue sa table, elle mérite une mention plus complète. Il s'agit de trouver la corde correspondant à l'arc de 30'. Voici comment il y parvient.

^(*) Cette numération incommode a subsisté jusqu'à la fin du xvi* siècle : Rheticus, Stevin, Viète et Neper ont par leurs travaux imposé l'usage de la numération décimale.

Soient la demi-circonférence AB Γ (fi.g. 5) et ΔB le rayon perpendiculaire; prenons le milieu E de $\Delta \Gamma$ et $EZ=EB:Z\Delta$ est le côté du décagone et BZ

A Z A E T

celui du pentagone.

De là, comme $\Delta E = 30^{\circ}$ et $\Delta B = 60^{\circ}$, on a $\Delta Z = 37^{\circ}4'55''$ pour le côté du décagone, et $BZ = 70^{\circ}32'3''$ pour celui du

pentagone. On sait d'ailleurs que ceux de l'hexagone, du carré et du triangle équilatéral sont respectivement 60°, 84°51′10″ et 103°55′23″. Les cordes des suppléments de la demicirconférence se déduisent facilement de

Il donne ensuite son célèbre théorème (*): le rectangle des diagonales d'un quadrilatère ins-B crit est égal à la somme des rectangles des côtés opposés, qu'il démontre en menant par un des sommets B (fig. 6) une droite BE faisant avec le côté BA un angle égal à ΔΒΓ.

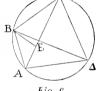
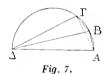


Fig. 6.

D'après cela, connaissant les cordes AB, AΓ (fig. 7), on



A EZT

pourra déduire la corde AB, puisqu'on a $AB.\Delta\Gamma + \Gamma B.A\Delta = A\Gamma.\Delta B.$

Donc, comme on connaît les cordes de 72° et de 60°, on aura celle de 12°.

Connaissant la corde B Γ (fig. 8) on aura de cette façon celle de l'arc $\Delta\Gamma$ moitié moindre. Abaissons la perpendiculaire ΔZ , on a

(a)
$$Z\Gamma = \frac{1}{2}(AB - A\Gamma), \quad \overline{\Gamma\Delta}^2 = A\Gamma.\Gamma Z.$$

En effet, prenons AE = AB, on aura $B\Delta = AE = \Delta\Gamma$ et $EZ = Z\Gamma$. Or $E\Gamma = A\Gamma - AB$: de là, la première relation (x). La seconde se tire de la similitude des triangles $A\Delta Z$, $\Delta\Gamma Z$.

On connaît la corde de 12°, on en tirera ainsi successive-

^(*) Carnot a observé que, du théorème de Ptolémée, on peut déduire oute la trigonométrie rectiligne.

ment celles des arcs de 6°, 3°, 1° 30′, 45′. Ces deux dernières sont égales à 1° 34′ 15″ et 0° 47′ 8″.

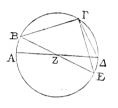
De la connaissance de la corde de 1° 30′, on tirera celle des cordes de 3°, de 4° 30′, etc., par le théorème suivant:

Soient les arcs AB, BF (fig. 9), on a

$$B\Delta . \Gamma E = B\Gamma . E\Delta + \Delta\Gamma . EB$$
,

d'où $A\Gamma$.

Il reste à trouver les cordes de 30', 1°, 2°, 2° 30', etc. On y arrivera avec une certaine approximation, au moyen du



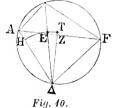


Fig. 9.

lemme suivant: De deux cordes $B\Gamma$, BA (fig. 10), la plus grande est à la plus petite en moindre raison que les arcs. En effet, soit Δ le milieu de l'arc supplémentaire $A\Gamma$; on a $\Gamma E > EA$, $E\Delta > \Delta Z$; donc le cercle décrit du rayon ΔE coupe la bissectrice ΔZ en T au delà de Z. Or

Donc, si AB est la corde de 45' et A Γ celle de 1°, comme AB = 0° 47' 8″, on aura Γ A < 1° 2′ 50″. Si AB est la corde de 1°, et A Γ celle de 1° 30′, on aura A Γ = 1° 34′ 15″; donc AB > 1° 2′ 50″.

A l'approximation adoptée par Ptolémée, les deux limites de la corde de 1° sont égales; il prend la limite commune pour la valeur cherchée, et en tire celle de 30'.

On construit alors la table de 30 en 30 minutes jusqu'a 180°, en prenant les trentièmes parties des différences, ce qui permet d'obtenir sensiblement les valeurs des cordes de minute en minute. On vérifie à mesure à l'aide des théorèmes donnant les cordes des suppléments ou de la somme ou de la différence des cordes déjà obtenues.

Κανονιον	TOY	εv	ZOZŽM	Sufferon

Περιφε	ρειων	8:	ευθειων			εζηκοτσων			
horb	้เพิ่ง	M	П	Δ	M	П	Δ	\mathbf{T}	
<u> </u>	λ'	0	λα	xε	ō	α	β	ν	
α	<u> </u>	α	3	γ	-0	α	β	y	
α	λ'	α	1.8	31	<u>o</u>	α	β	y	
β	<u>-</u>		ε	h.	<u>-</u>	α	β	ν	
β	λ'	β	7.5	6	<u>-</u>	α	β	μη	
						•			
pon	λ'	ριθ	νb	хõ	ō	0	0	μα	
ροθ	0	· p:0	νθ	μδ	ō	ō	ō	7.5	
ροθ	λ'	ριν	99	δν	<u> </u>	<u> </u>	<u>-</u>	0	
ρπ	ō	ρχ	o_	ō	ō	0	<u> </u>	<u>-</u>	
						(.	A su	ivre.)	

EXERCICES DIVERS

Par Aug. Boutin

387. — Calculer
$$u_n$$
, sachant que $u_0 = b$, $u_1 = x, \ldots u_n = xu_{n-1} \pm u_{n-2}$. On trouve $u_n = x^n \pm (b+n-2)x^{n-2} + \ldots$ u_n satisfait à l'équation différentielle:
$$[(2b-1)x^2 \pm 2b(b+1)] \frac{d^2u_n}{dx^2} + 3x \frac{du_n}{dx} - n[(2b-1)n + 4 - 2b]u_n = 0.$$

Les signes supérieurs doivent être pris ensemble, les signes inférieurs également.

Cette équation différentielle donne le moyen d'avoir aisément la loi des coefficients.

Pour plus de généralité, on peut, dans les formules précédentes, remplacer x par x+a.

388. — Calculer un sachant que

$$u_0 = 1$$
, $u_1 = x \pm 1$,... $u_n = xu_{n-1} - u_{n-2}$.

On trouve $u_n = x^n \pm x^{n-1} - (n-1)x^{n-2} \pm ...$

u, satisfait à l'équation différentielle:

$$(x^2-4)\frac{d^2u_n}{dx^2}+2(x\pm 1)\frac{du_n}{dx}-n(n+1)u_n=0,$$

qui permet d'obtenir aisément la loi des coefficients.

Dans ces formules, les signes doivent être pris parallèlement. Pour plus de généralité, on peut y remplacer x par x + a.

389. — Enveloppe de la droite symétrique de la tangente au sommet d'une parabole par rapport aux autres tangentes.

On trouve un cercle dont le centre est le foyer et qui passe par le sommet.

390.— Dans un triangle, M et M₂ étant deux points inverses, r_a, r_b, r_c, r'_a, r'_b, r'_c, les rayons des cercles inscrits dans les triangles MBC, MAC, MAB, M₂BC, M₂AC, M₂AB. Démontrer la relation:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{r}_a} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{r}_b} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{r}_c} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{r}_a'} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{r}_b'} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{r}_c'}.$$

On a

$$r_a = \frac{a}{\cot g \frac{\text{MBG}}{2} + \cot g \frac{\text{MCB}}{2}}$$

- **391.** Le plan étant partagé en une infinité de triangles équilatéraux formant carrelage, on ne peut y placer un carré dont les sommets coïncident avec des sommets de ces triangles.
- **392.** On partage la suite naturelle des nombres en tranches contenant la première un nombre, la seconde trois, ... la nº, 3ⁿ⁻¹ nombres. La somme des nombres de chaque tranche est un carré.
- **393.** D'un point M du plan d'un triangle, on abaisse les perpendiculaires $MH_aH_bH_c$, $MH_b'H_a'H_c'$, $MH_c''H_a''H_b''$, sur les côtés BC, CA, AB et rencontrant respectivement les côtés en H_a , H_b , ... Démontrer que :

1° Si S_1 , S_1' , S_1'' , sont respectivement les aires des triangles $H_aH_b'H_c''$, $H_bH_c'H_a''$, $H_cH_a'H_b''$, on a entre ces aires la relation:

$$S_1 = (S_1' + S_1'') \cos A \cos B \cos C$$
.

- 2° Le lieu des points M tels que H_b , H'_c , H'_a soient en ligne \vee droite est une conique circonscrite au triangle de référence. Le lieu des points M, tels que H_c , H'_a , H''_b soient en ligne droite, est une seconde conique, analogue à la précédente.
- 3º Les deux coniques en question, en dehors des sommets du triangle, ont un quatrième point commun, le point de Tarry.

Si x, y, z, sont les coordonnées normales de M, on a: ${}_{2}S_{1} = yz \sin A + xz \sin B + xy \sin C$,

 $_2S'_1\cos A\cos B\cos C = yz\sin C\cos B + xz\sin A\cos C + xy\sin B\cos A$ $_2S''_1\cos A\cos B\cos C = yz\sin B\cos C + xz\sin C\cos A + xy\sin A\cos B.$

Les coniques dont il est question au § 2° sont les transformées par points inverses de deux droites remarquables déjà rencontrées (J. M. E., année 1892, p. 158, Ex. n° 238). Ces coniques sont simultanément des hyperboles, des paraboles ou des ellipses, suivant que $\cot \theta$ est inférieur, égal, ou supérieur à $\sqrt{7}$. (θ angle de Brocard de ABC.)

BACCALAUREATS

Académie d'Aix (Faculté de Marseille).

Calculer $\sin 2x$ sachant que $\sin x - \cos x = \frac{1}{5} \cdot {(*)}$

Académie d'Alger.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Étant donnés le rayon R de la base d'un cône et sa hauteur h. à quelle distance x du sommet faut-il mener un plan parallèle à la base

(*) L'équation proposée, élevée au carré, donne immédiatement le résultat cherché. L'angle 2x, correspondant à cette équation, se construit, très simplement, en observant que l'on a

$$\sin 2x = \frac{24}{25}, \qquad \cos 2x = \frac{7}{25}.$$

Il suffit de construire un triangle rectangle dont les côtés sont 7, 24; l'hypoténuse est égale à 25.

On construit, si l'on veut, directement, l'angle x, en observant que l'équation proposée peut s'écrire

$$\sin (x - 45^{\circ}) = \frac{\sqrt{2}}{10}, \text{ etc...}$$

pour que le volume du tronc soit égal à deux fois celui de la sphère qui

aurait pour diamètre la hauteur du tronc?

II. — Trouver la latitude du lieu dans lequel l'ombre d'une tige verticale, au solstice d'été, et à midi vrai, a pour longueur la moitié de la hauteur de la tige.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. — Inscrire dans un hémisphère donné, de rayon R, un tronc de cône dont le volume soit dans un rapport donné m avec la sphère qui pour diamètre la hauteur du tronc.

II. — Questions au choix: 1º Établir les formules qui permettent de

calculer les angles d'un triangle lorsqu'on en connaît les côtés.

2º Résolution des équations de la forme $a \sin x + b \cos x = c$, dans

laquelle a, b, c sont des nombres donnés.

 $\tilde{3}^{\circ}$ Trois points A, B, C étant donnés sur un plan, trouver sur le plan un point O d'où les distances AB et BC sont vues sous des angles donnés α et β .

Académie de Besançon.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Étant donné un demi-cercle de centre O de rayon R et dont AB est un diamètre, on demande de mener dans ce demi-cercle une corde MM' parallèle à AB, de telle sorte qu'en désignant par S le point où la tangente en M rencontre AB prolongé, par MTM' le plus petit des arcs sous-tendus par la corde MM', par K et m deux nombres positifs donnés, on ait:

Vol. MTM' + k vol. MOM' = m vol. SOM;

vol. MTM', vol. MOM' et vol. SOM désignant les volumes engendrés par le segment de cercle MTM', le triangle MOM' et le triangle MOS tournant autour de AB. — Discuter.

Académie de Bordeaux.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. -(a) Formules d'addition pour le sinus et le cosinus;

(b) Démontrer que toutes les lignes trigonométriques de l'arc a s'expriment en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$;

(c) Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro.

II. — Une tige homogène pesante, de poids P et de longueur A, est mobile autour de son extrémité O. Au point A est attaché un cordon inextensible et sans pesanteur ABM qui passe sur une poulie infiniment petite B située sur la verticale du point O et à une distance OB = h; au cordon est suspendu un corps de poids π .

On demande: 1º De trouver l'angle x(x = AOB) de la tige avec la

verticale, lorsque le système est en équilibre;

2º De démontrer que si π est compris entre certaines limites (que l'on déterminera), les positions d'équilibre sont au nombre de trois.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Étant donnés dans un plan trois points A, B, C qui forment un triangle dont tous les éléments sont connus, déterminer, dans l'espace, le lieu des points M tels que l'on ait pour chacun d'eux : $\frac{MA}{MB} = \frac{MA}{MC} = K.$ — Discussion.

II. — Les autres compositions comme au baccalauréat classique.

Académie de Caen.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

En posant $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

calculer les diverses valeurs numériques que prend S_n lorsqu'on attribue à l'entier n les diverses valeurs particulières 1, 2, 3, 4; trouver, d'après les résultats obtenus, la formule générale qui donne la valeur de S_n pour n quelconque et vérifier ensuite la valeur de cette formule en prouvant que, si elle est vraie pour n = k, elle l'est encore pour n = k + 1.

I. — Les bases d'un tronc de cône ont : l'une 3 mètres, l'autre 5 mètres de rayon. Calculer, sans le secours des tables, et à 1 millimètre près, le rayon de la section menée, parallèlement aux bases, de manière à partager le solide considéré en deux troncs de cône équivalents.

II. — Questions au choix: 1º Déterminer la fraction ordinaire génératrice

d'une fraction décimale périodique mixte.

2° Expliquer l'épure propre à déterminer l'angle d'un plan quelconque, donné par ses traces, avec un plan passant par la ligne de terre et faisant un angle connu avec le plan horizontal.

3º Démontrer que le mouvement apparent d'une planète, par rapport à

la terre, est tantôt direct et tantôt rétrograde.

- I. Quel peut être le chiffre des unités d'un nombre N dont le carré N^2 se termine par un 6? Faire voir que si N^2 se termine par un 6, le chiffre des dizaines de N^2 est nécessairement impair.
 - II. Questions au choix: (a) Recherche du p. g. c. d. de deux nombres;
- (b) Les foyers et le grand axe d'une ellipse étant donnés, mener une tangente à cette courbe par un point donné dans le plan. Condition de possibilité.

(c) Réduire à deux forces un système quelconque de forces appliquées

à un corps solide.

Académie de Clermont.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Volume engendré par un triangle rectangle tournant autour de son hypoténuse; entre quelles limites peut varier ce volume lorsque la longueur de l'hypoténuse est donnée?

II. - Définition du jour solaire moyen.

I. — Démontrer que dans un trièdre une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.

II. - Déterminer sur une droite donnée BC un point M, de manière qu'un point mobile aille du point donné extérieur A au point B. donné sur cette droite, dans un temps donné t en parcourant la droite AM avec une vitesse donnée v, puis la droite MB avec une vitesse donnée V - Discussion.

BACCALAURÉAT CLASSIOUE

I. — Questions au choix: (a) Projection stéréographique;

(b) Inégalité des jours et des nuits;

(c) Lois de Kepler. Inégalité des saisons.

II. — On donne dans un triangle rectangle la somme l de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante et la surface s. Calculer les trois côtés · du triangle. Condition de réalité.

Académie de Dijon.

BACCALAURÉAT COMPLET ET CLASSIQUE

I. — Démontrer que l'équation $\frac{m^2}{x-a} + \frac{n^2}{x-b} + c = 0$ a toujours ses

racines réelles (*).

II. - Dans un triangle, on donne un côté a et les deux angles adjacents B et C (B < C). On demande d'exprimer en fonction de ces données: 1º la longueur h de la hauteur du triangle issue du sommet A opposé au côté a; 2º la longueur m de la médiane issue du même sommet; 3° les longueurs p et q de la bissectrice de l'angle A et de la bissectrice de l'angle exterieur adjacent à celui-ci.

III. - Étant données les équations

 $x^2 + px + q = 0,$ $x^2 + p'x + q' = 0,$

Calculer $(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')(\beta - \alpha')(\alpha - \beta')$; $\alpha, \beta,$ désignant les racines de la première; $\alpha', \beta',$ celles de la seconde (**).

IV. — Démontrer la propriété de la tangente en un point de l'ellipse. V. - Démontrer que si l'on désigne par V le volume d'un segment quelconque, par h sa hauteur, par c le rayon du cercle de la sphère dont le plan est parallèle aux bases du segment et à égale distance $\mathbf{d}c$ chacune d'elles, on a

$$V = \pi e^2 h - \frac{\pi h^3}{12}.$$

 $(q-q')^2 = (p-p')(pq'-qp').$ On peut aussi la calculer directement, en observant que la fonction

proposée est $(\alpha^2 + p'\alpha + q') (\beta^2 + p'\beta + q');$

on a une fonction symétrique de α, β, etc...

^(*) On observe qu'il y a une racine comprise entre a, b. Le procédé le plus simple, pour l'établir, consiste à rendre à l'équation la forme entière, et à substituer a, b.

^(**) La fonction proposée représente la condition nécessaire et suffisante pour que les équations aient une racine commune. On sait que cette condition, que l'on peut trouver par des procédés divers, est

QUESTION 257 (*)

Solution, par M. DE TIMES.

ABC étant un triangle donné, soit D le point de contact avec BC, du cercle inscrit O. On projette les sommets B, C en E, F sur la bissectrice AO; puis l'on construit les parallélogrammes DEBG, DFCH.

Cela posé: 1º les points B, G, C, H, appartiennent à une circonférence; 2º le centre de cette circonférence et le centre O du cercle inserit sont également distants du côté BC. (E. Catalan.)

T étant le point de rencontre de la bissectrice AO et du côté BC, les triangles BET, ODT sont semblables et on a la proportion

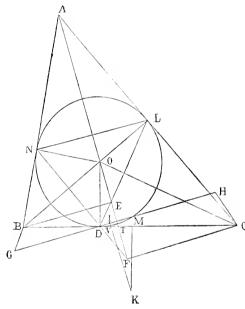
$$\frac{ET}{DT} = \frac{BT}{OT}$$

Il suit de là que les triangles EDT, OBT ont un angle égal comprisentre des côtés proportionnels et sont aussi semblables. On a donc

$$\widehat{\mathrm{EDT}} = \widehat{\mathrm{BoT}}$$

$$= I^{dr} - \frac{1}{2} C$$

et la droite DE est perpendiculaire à CO et joint les 6 points de contact D, L du cercle inscrit. On verrait



^(*) Nous avons reçu, trop tardivement pour pouvoir les mentionner, deux solutions de la question 580 (Voir *Journal*, p. 95). L'une de M. Georges Rodriguez, étudiant à Medellin (Colombie); l'autre, de M. A. Bozal-Obejero, professeur à l'Institut de Bilbao (Espagne).

de même que la droite DF se confond avec la corde de contact DN.

Cela posé, il est facile de vérifier que les triangles BDE CDF sont semblables; on a donc

$$\frac{BE}{DC} = \frac{DB}{CE}$$
, ou DG.DH = DC.DB;

ce qui établit la première partie du théorème.

On arrive eucore au même résultat comme il suit:

On a DB. DC =
$$(p-b)(p-c)$$
,

et DG.DH = BE.CF =
$$bc \sin^2 \frac{1}{2} A = (p - b)(p - c)$$
, etc.

2º Soient M et I les milieux de BC et de GH et par ces points menons des perpendiculaires respectivement à ces deux droites. Ces perpendiculaires se coupent au point K, centre du cercle passant par les points B, G, C, H. Les triangles VMK, ODT sont semblables et, pour établir leur égalité, il suffit de faire voir qu'ils ont un côté égal, par exemple que MV = DT ou que MT = DV.

on a
$$MT = \frac{1}{2}a - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)};$$
 on a aussi
$$GI = \frac{1}{2} GH = \frac{1}{2} (BE + CF),$$
 ou
$$GI = \frac{1}{2} (b+c) \sin \frac{1}{2} A,$$
 et
$$DG = c \sin \frac{1}{2} A,$$
 d'où
$$DI = \frac{1}{2} (b-c) \sin \frac{1}{2} A.$$
 or,
$$DV = \frac{DI}{\cos \cdot IDV} = \frac{(b-c) \cos \frac{1}{2} (B+C)}{2 \cos \frac{1}{2} (B-C)} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)};$$

les valeurs de MT et de DV étant égales, on en conclut l'égalité des droites MK et OD.

QUESTION 561 Solution par M. H. Dellag.

Démontrer que deux triangles sont semblables lorsque les cosinus de leurs angles sont proportionnels. (H. Dellac.)

Entre les angles d'un triangle, on a la relation

$$S + 2P = 1$$

en posant

 $S = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$, $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

On a, par hypothèse,

$$\frac{\cos A}{\cos A'} = \frac{\cos B}{\cos B'} = \frac{\cos C}{\cos C'} = \lambda.$$

Donc, en substituant,

$$\lambda^2 S' + 2P'\lambda^3 = 1.$$

Mais on doit avoir aussi

$$S' + \varkappa P' = 1$$
;

éliminant S', on a

$$\lambda^2 - 1 + 2\lambda^2 P'(\lambda - 1) = 0.$$

On 'rouve d'abord $\lambda = 1$; à cette solution correspond la simili ude des deux triangles.

Reste à faire voir que les autres solutions ne peuvent convenir. Elles sont données par l'équation

$$_{2}P'\lambda^{2}+\lambda+\iota=0.$$

D'abord, les racines de cette équation sont toujours réelles. En effet, le discriminant 1-8P' est positif, le produit P' étant maximum lorsque les trois angles sont égaux; alors les cosinus sont égaux à $\frac{1}{2}$.

Supposons que les trois angles A', B', C' soient aigus; P' est positif, et les deux racines sont négatives. Elles donnent

pour A, B, C trois angles obtus, ce qui est impossible.

Supposons que le triangle A'B'C' ait un angle obtus; il ne peut en avoir davantage.

Alors P' est négatif, et, en posant $P' = -P_1$, l'équation devient

$$f(\lambda) = 2P_1\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Cette équation a une racine négative qui ne convient pas, nous avons vu pourquoi. Démontrons que la racine positive λ ne convient pas non plus.

Pour qu'elle convint, il faudrait que l'on eût simultanément $\lambda^2 \cos^2 A' < 1$, $\lambda^2 \cos^2 B' < 1$, $\lambda^2 \cos^2 C' < 1$,

d'où

$$\lambda^2 S' < 3$$
, $\lambda < \sqrt{\frac{3}{S'}}$.

Je dis que cette dernière condition n'est pas remplie. On a

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{S'}}\right) = \frac{6P_1 - S' - \sqrt{3S'}}{S'},$$

et comme

$$2P_1 = S' - I,$$

il vient

011

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{S'}}\right) = \frac{2S' - 3 - \sqrt{3S'}}{S'}.$$

Comme S' est positif, il suffit de chercher le signe du numérateur: je dis que c'est toujours le signe -. Si l'on avait 2S'-3< o, ce serait évident; examinons donc le cas de 2S'-3> o. Je dis que l'on a

$$2S' - 3 < \sqrt{3S'}$$
 ou $(2S' - 3)^2 < 3S'$,
 $(4S' - 3)(S' - 3) < 0$.

Or, l'hypothèse 2S'-3>0 donne a fortiori 4S'-3>0; d'ailleurs, S' est évidemment plus petit que 3. Donc l'inégalité est vérifiée.

Ainsi $f\left(\sqrt{\frac{3}{\mathrm{S}'}}\right)$ est de signe contraire au premier terme de

l'équation, et par suite la quantité $\sqrt{\frac{3}{S'}}$ est comprise entre

les deux racines; il est donc plus petit que la racine positive λ .

La seule valeur de λ admissible est donc $\lambda = 1$, ce qui conduit à la similitude et démontre le théorème.

On démontrerait de même que deux triangles sont semblables lorsque les sinus des demi-angles sont proportionnels; ou, ce qui revient au même, lorsque les distances des sommets aux centres des cercles inscrits sont proportionnelles.

QUESTION 574

Solution par M. Antoine DavidogLou, élève au lycée de Berlad.

M. de Longchamps a considéré dans le triangle ABC les trois cercles A(a), B(b), C(c) et a montré, le premier, leur importance:

Démontrer que les rayons des cercles tangents à ces trois cercles et qui les laissent tous les trois à l'extérieur, ou tous les trois à l'intérieur, ont pour valeur, respectivement:

$$\rho' = \frac{2p(p-2R-r)}{2p-\delta}, \qquad \rho'' = \frac{2p(2R+r+p)}{2p+\delta}.$$

Les autres groupes de cercles tangents ont pour rayons

$$\begin{split} \rho_a' &= \frac{2 \, (\mathrm{p} - \mathrm{a}) [\mathrm{R} - \mathrm{r}_a - (\mathrm{p} - \mathrm{a})]}{2 \, (\mathrm{p} - \mathrm{a}) - \delta_a}, \\ \rho_a'' &= \frac{2 (\mathrm{p} - \mathrm{a}) [-2 \, \mathrm{R} + \mathrm{ra} - (\mathrm{p} - \mathrm{ar}]}{2 \, (\mathrm{p} - \mathrm{a}) + \delta_a} \quad \text{etc.} \end{split}$$

 δ , δ_a ... représentant les quantités ${}_4R$ + r, ${}_4R$ - r $_a$, etc. (E. Lemoine.)

 $\begin{array}{l} \textbf{Lemmes.} - \text{On a: } \Sigma ab = p^2 + r \delta; \; \Sigma a^2 b^2 = 4 r^2 p^2 + (p^2 - r \delta)^2; \\ \Sigma a^2 = 2 (p^2 - r \delta); \; \Sigma a^3 = 2 p (p^2 + 6 \, \text{Rr} - 3 r \delta); \; \Sigma a^4 = 2 [(p^2 - r \delta)^2 - 8 r^2 p^2]; \\ \Sigma a^5 = 2 p [p^2 (p^2 + 10 \, \text{Rr}) - 5 r (2 \, \text{R} + r) (2 p^2 - r \delta)]; \; \Sigma a^6 = 4 p^2 \\ (p^2 + 6 \, \text{Rr} - 3 r \delta) (p^2 + 2 \, \text{Rr} - 3 r \delta) - 16 \, \text{Rr} p^2 (p^2 - r \delta) - 2 (p^2 + r \delta) \\ (4 r^2 p^2 + (p^2 - r \delta)^2). \; (Journal, \, 1894; \, \text{p. } 139). \end{array}$

Si ω est le centre du cercle tangent extérieurement, on a, en posant

$$\widehat{\mathrm{B}\omega\mathrm{C}} = \alpha, \quad \widehat{\mathrm{C}\omega\mathrm{A}} = \beta, \quad \widehat{\mathrm{A}\omega\mathrm{B}} = \gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{(\rho - b)^2 + (\rho - c)^2 - a^2}{2(\rho - b)(\rho - c)}; \quad \cos\beta = \qquad \text{etc.};$$

alors, au moyen de la relation

 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, on obtient, toutes simplifications faites, une équation du second degré en ρ , $A\rho^2 + B\rho + C = 0$, les coefficients étant : $A = -9\Sigma a^4 + 8p\Sigma a^3 + 2\Sigma a^2b^2 - 8p.a.b.c = 16r^2(4p^2 - \delta^2),$ $B = 4[\Sigma a^5 + 3p\Sigma a^4 - 4p^2\Sigma a^3 + 2abc\Sigma a^2 + abc\Sigma ab]$ $= 64pr^2[\delta(2R+r) - 2p^2],$

$$=64pr^{2}[\delta(2R+r)-2p^{2}],$$

$$C=4[2p\Sigma a^{5}+2p^{2}\Sigma a^{4}-abc\Sigma a^{3}-a^{2}b^{2}c^{2}]=64p^{2}r^{2}[p^{2}-(2R+r)^{2}].$$

On a alors:

 $(4p^2 - \delta^2)\rho^2 + 4p[\delta(2R + r) - 2p^2]\rho + 4p^2[p^2 - (2R + r)^2] = 0,$ et on voit aisément que cette équation a pour racines o', o".

Les autres couples de rayons se déduisent immédiatement de celles-ci, appliquant la transformation continue respectivement en A. B. C.

QUESTION 586

Solution par M. A. DROZ-FARNY.

Le point de rencontre des diagonales d'un quadrilatère inscrit dans une circonférence et circonscrit à une autre est sur la ligne des centres de ces deux circonférences. (E. Foucart.)

Le théorème proposé est un cas particulier d'une proposition beaucoup plus générale. Si un polygone peut ètre inscrit dans une circonférence et circonscrit à une autre, il en existe une infinité; les diagonales de ce polygone enveloppent des circonférences appartenant au faisceau détermine par les deux premières; si le polygone a un nombre pair de côtés, les diagonales joignant les points opposés, comme appartenant à deux polygones différents d'un même nombre de côtés ne peuvent envelopper qu'un cercle point, un des points de Poncelet du système des deux circonférences.

Nota. — M. Négrétzu nous fait observer que cette question 586 se trouve complètement traitée dans les Exercices de géométrie analytique, par M. J. Koehler (p. 3). On y trouve encore diverses propriétés du quadrilatère inscriptible et circonscriptible.

La question peut d'ailleurs être traitée géométriquement en s'appuyant sur le théorème de Brianchon et en considérant la figure comme un havagane circonscriét

hexagone circonscrit.

QUESTION 601

Solution par M. Alfred CHAMPION.

On donne, dans l'espace, un point O et une circonférence sur laquelle se trouvent les sommets A, B, C, D d'un quadrilatère convexe. Démontrer la relation

AB, BD, AD, $\overline{OC}^2 + BC$, CD, BD, \overline{OA}^2

 $= AB.BC.AC.\overline{OD}^2 + AC.CD.AD.\overline{OB}^2$. (Mannheim.)

Le théorème de Stewart, appliqué aux triangles OAC, OBD, donne

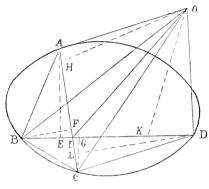
(1) \overline{OI}^2 . AC = \overline{OA}^2 . IC + \overline{OC}^2 . AI - AI. IC. AC,

(2) \overline{OI}^2 .BD = \overline{OB}^2 .DI + \overline{OD}^2 .BI - BI.DI.BD.

Multipliant (1) par BD et (2) par AC, on obtient:

 $\overline{O1}^2$. AC.BD = \overline{OA}^2 . IC.BD + \overline{OC}^2 . AI.BD - AI.IC BD. AC

 \overline{OI}^2 .BD.AC = \overline{OB}^2 .DI.AC + \overline{OD}^2 .BI.AC - BI.DI BD.AC



Retranchant et observant que BI.DI = AI.IC, il vient:

(3) $\overline{OA}^2.IC.BD + \overline{OC}^2.AI.BD = \overline{OB}^2.DI.AC + \overline{OD}^2.BI.AC$. Abaissons les perpendiculaires des sommets A, B, C, D sur

les diagonales. On a, évidemment, $\frac{IC}{AI} = \frac{CG}{AE}$ et $\frac{DI}{BI} = \frac{DL}{BF}$.

Remplaçant dans (3) les quantités IC,AI,DI,BI par les quantités proportionnelles CG,AE,LD,BF, il vient :

 \overline{OA}^2 . CG. BD + \overline{OC}^2 . AE. BD = \overline{OB}^2 . LD. AC + \overline{OD}^2 . BF. AC, ou \overline{OA}^2 . 2 surf. BCD + \overline{OC}^2 . 2 surf. ABD

 $= \overline{OB}^2$ 2 surf. ADC $+ \overline{OD}^2$ 2 surf. BAC.

Multipliant chaque membre par 2R et appliquant la relation abc = 4RS, il vient enfin :

 $AB.BD.AD.\overline{OC}^2 + BC.CD.BD.\overline{OA}^2$

 $= AB.BC.AC.\overline{OD}^2 + AC.CD.AD.\overline{OB}^2.$

Conséquences (*). — La relation peut encore s'écrire \overline{OA}^2 . $\overline{BCD} + \overline{OC}^2$. $\overline{ABD} = \overline{OB}^2$. $\overline{ACD} + \overline{OD}^2$. \overline{ABC}

^(*) Ce paragraphe est de M. Jean Négrétzu.

ou

(ABC, ACD, ... sont les aires des triangles ABC, ACD...); on trouve ainsi géométriquement la condition pour que quatre points A, B. C et D soient sur un même cercle.

Dans le cas où le quadrilatère est un rectangle ou un carré, on a ABC = ACD = ..., et la relation se réduit à

$$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OD}^2$$
.

Au moyen de cette dernière relation on peut résoudre facilement le problème suivant:

Soit OABCD une pyramide dont la base ABCD est un carré ou un rectangle. Considérons les projections A', D' des sommets A, D respectivement sur les côtés opposés OC, OB. Démontrer que les triangles tels que OA' D'. sont semblables aux triangles tels que OBC.

Dans les triangles AOC, DOB, on a

$$\overline{DB^2} = \overline{OD^2} + \overline{OB^2} - 2OB \times OD'$$

$$\overline{AC^2} = \overline{OA^2} + \overline{OC^2} - 2OC \times OA'.$$

Et, en retranchant membre à membre,

$$OD^2 + \overline{OB}^2 - 2OB \times OD' = OA^2 + \overline{OC}^2 - 2OC \times OA'.$$

Et. en vertu de la relation précitée,

$$OB \times OD' = OC \times OA',$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OA'}{OD'}.$$

Les deux triangles OA'D', OBC ayant un angle commun compris entre côtés proportionnels, sont semblables.

Enfin. si l'on fait les projections des points A, D, \ldots sur les côtés non opposés, les droites telles que $A'D'\ldots$ sont parallèles aux droites telles que $BC\ldots$

Remarque par l'auteur de la Question 601.

C'est en 1890, dans le Messenger of Mathematics que je suis arrivé, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, au théorème qui fait l'objet de la question 601.

J'ai signalé alors le cas particulier où, la circonférence étant réduite à une droite, le point O est sur cette droite. La relation (3) conduit, dans ce cas, à une relation concernant cinq points en ligne droite qui avait été donnée, sans démonstration, par Chasles dans son Aperçu historique. Aujourd'hui, je ferai remarquer que si le point O appartient à l'axe du cercle, ses distances aux sommets du quadrilatère sont égales. On peut alors supprimer ces distances dans la relation (3), on est ainsi conduit à la relation qui donne le rapport des diagonales d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, au moyen des côtés.

Si le point O est confondu avec l'un des sommets du quadrilatère, la relation (3) conduit à l'expression du produit des diagonales de ce quadrilatère, en fonction des côtés. Ainsi : les deux théorèmes classiques concernant les côtés et les diagonales d'un quadrilatère inscrit dans un cercle peuvent s'obtenir comme conséquences d'un même théorème.

QUESTIONS PROPOSÉES

- 642. On donne un angle droit AIX et sur l'un des côtés un point fixe A. Sur IX on considère deux points variables B, C tels que IB.IC = K. 1° Démontrer que l'orthocentre du triangle variable ABC est fixe. 2° Trouver le lieu du centre du cercle ABC. 3° Faire voir que pour chaque position de ABC où l'un des angles est obtus il y a une infinité de quadrilatères inscriptibles où les diagonales et les côtés opposés se coupent aux trois sommets de ABC, et que tous ces quadrilatères sont inscrits dans un même cercle qui reste invariable quand B et C varient. (Bernès.)
- 643. Si ABCD est un quadrilatère inscriptible et M, P, Q les points de concours des côtés opposés ou des diagonales, les puissances des trois points M, P, Q relativement au cercle ABCD sont inversement proportionnelles aux coordonnées barycentriques relativement au triangle MPQ de l'orthocentre de ce triangle. En conclure que les deux cercles MPQ, ABCD ont pour axe radical l'axe orthique du triangle MPQ.

 (Bernès.)
- **644.** A et B étant deux points fixes, M un point variable du plan, sur la tangente en B au cercle ABM on porte $BM' = K.\frac{BM}{AM}$ où K est une longueur constante, le lieu de M

étant donné, trouver le lieu de M'. Montrer que si le lieu de M est une droite ou une circonférence, celui de M' est généralement un cercle.

(Bernès.)

- **645.** On donne un parallélogramme oaba'. Sur la droite ab, on prend arbitrairement le point m que l'on projette orthogonalement en n sur oa et ce point n est projeté de même en p sur ab. La droite po coupe a'b en m' que l'on projette en n' sur oa' et ce point n' est projeté en p' sur a'b. Démontrer que les points m, o, p' appartiennent à une même droite.

 (Mannheim.)
- **646.** Dans la circonférence circonscrite à ABC, AA_1 , AA_2 étant deux cordes rectangulaires, si β , γ sont les points où BA_1 ; CA_1 rencontrent AA_2 , les cerles $AB\beta$, $AC\gamma$ sont orthogonaux au cercle ABC. Généraliser en supposant que les cordes AA_1 , AA_2 fassent un angle donné α . (Bernès.)
- **647.** Les médiatrices de AC, AB dans le triangle ABC rencontrent en β, γ, la médiane AD. Démontrer que Cβ, Bγ se coupent en M sur la symédiane et que AM est perpendiculaire sur OM, O étant le centre de la circonférence ABC.

 (Bernès.)
- **648.** H étant l'orthocentre du triangle ABC, S le point diamétralement opposé à A sur le cercle ABC, β , γ les points où BH, CH rencontrent AS, démontrer que le point où se coupent les cercles AB β , AC γ est la projection de H sur la médiane AD. (Bernès.)
- 649. M et N sont deux points quelconques du plan du triangle ABC, symétriques l'un de l'autre relativement au milieu D de BC. Si β et γ sont les points où BN, CN coupent AM, et que M' soit le point de rencontre des tangentes en B et C aux circonférences AB β , AC γ , démontrer que si M parcourt une droite ou un cercle, M' parcourt généralement un cercle. Plus généralement, le lieu de M étant donné, quel est celui de M'? Faire voir que les tangentes en M et M' aux deux lieux se coupent sur la circonférence AMM'.

Le Directeur-gérant, G. DE LONGCHAMPS.

SIMPLES REMARQUES SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ

DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE

Par M. E. Brand.

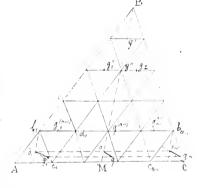
Poissor (*) a déterminé le centre de gravité d'un triangle en se servant d'une décomposition particulière de cette surface qui nous suggère les considérations suivantes :

1. — Désignons par EMD le centre des moyennes distances et par EG le centre de gravité.

Rappelons que le GMD des sommets d'un triangle est au point de croisement des trois médianes de ce triangle (droites qui se coupent au tiers de leur longueur à partir des côtés) et que le GMD des sommets d'un tétraèdre est au point de rencontre des droites joignant un sommet au GMT

des trois autres (droites qui se coupent au quart de leur lon-gueur à partir des faces du tétraèdre).

Pour abréger le discours, au lieu de dire: le CMD des sommets du triangle et le CMD des sommets du tétraèdre, nous emploierons les expressions: CMD du triangle et CMD du tétraèdre.



Cela étant, soit un triangle

ABC (βg . 1) décomposé au moyen de droites équidistantes et parallèles à chacun de ses côtés, en n^2 triangles égaux, semblables au triangle primitif et formés d'une substance

^{*} Eléments de statique, 11° édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1873; p. 145.

non homogène, mais, néanmoins, identique pour tous les triangles constitutifs (*), alors :

Théorème. — Le \mathfrak{CGg}_1 d'un triangle constitutif $\operatorname{Ab_1c_1}$ étant à une distance \mathfrak{d} du point \mathfrak{o}_1 , \mathfrak{GMD} de ce triangle, le \mathfrak{CGG} du triangle ABC sera à une distance $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{n}}$ du point \mathfrak{o}_1 , \mathfrak{CMD} du triangle primitif et la droite \mathfrak{OG} sera parallèle à $\mathfrak{o}_1 \mathfrak{g}_1$.

En effet, le triangle ABC peut être considéré comme composé de n triangles égaux à Ab_1c_1 disposés le long de la base AC et de $\frac{n^2-n}{2}$ parallélogrammes égaux tels que $b_1c_1d_1e_1$.

Les $\mathfrak{C}\mathfrak{G}g_1\ldots g_n$ des triangles tels que $Ab_1c_1,\ldots c_{n-1}b_{n-1}C$ seront équidistants et situés sur une parallèle à AC. Le $\mathfrak{C}\mathfrak{G}$ de ces n points isolés sera le point g, au milieu de g_1g_n , ce point g aura une charge n, si on représente par \mathfrak{I} le poids du triangle Ab_1c_1 .

Si on appelle $o_1...o_n$ les CMD des triangles $Ab_1c_1,...$ $o_{n-1}b_{n-1}C$ et o le milieu de o_1o_n , la droite og sera parallèle et égale à $o_1g_1,...o_ng_n$.

Le CO de chaque parallélogramme se trouvera au centre de figure de chacun de ceux-ci, de sorte que l'ensemble des parallélogrammes fournira des CO auxiliaires distribués sur des droites parallèles équidistantes, la première contenant un point g', la seconde deux points g'_1 et g''_1 , ... la $(n-1)^e$ contenant n-1 points $g_1^{(n-1)}$... $g_{n-1}^{(n-1)}$, chaque point ayant une charge 2.

Les points d'une même ligne donneront un & situé au milieu de la ligne, de manière qu'eu sin de compte, il restera

^(*) Par triangles égaux de substance identique, quoique non homogène, il faut entendre des triangles soumis aux conditions suivantes:

¹º Les triangles sont superposables;

²º La substance de chacun d'eux n'est pas homogène, c'est-à-dire que la densité des différents points n'est pas constante;

^{3°} Si on superpose les triangles, la loi de la densité est unique pour les surfaces superposées, c'est-à-dire que la densité a la même valeur pour les points qui coïncident.

une série de points g', \mathring{g}'' , ... $g^{(n-1)}$ situés sur la médiane BOM et ayant des charges représentées respectivement par 2, 4, ... 2(n-1).

Le $\mathfrak{C}\mathfrak{G}_{7}$ de ces points $g', \ldots g'^{n-1}$ sera sur BM à une distance du point B que l'on détermine par la formule des moments polaires. En appelant μ la n^{e} partie de BM et prenant le point B comme pôle, on aura

By =
$$\frac{2 \times \mu + 4 \times 2\mu + 6 \times 3\mu + \dots + 2(n-1) \times (n-1)\mu}{2 + 4 + 6 + \dots + 2(n-1)}$$

ou bien

$$B\gamma = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)} \nu = \frac{\frac{n(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2n-1}{3} \nu,$$

ou, encore, en désignant par $\,m\,$ la médiane,

$$B\gamma = \frac{(2n-1)m}{3n}.$$

La question revient maintenant à trouver le COG des deux points γ et g; leurs charges respectives étant n(n-1) et n, la charge totale sera n^2 .

Le point G (fig. 2), sera déterminé par le rapport

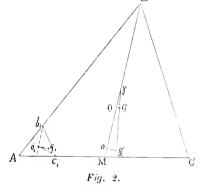
$$\frac{\gamma G}{\gamma g} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Si on mène GO parallèle à go, on aura évidemdemment

$$\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{o}g} = \frac{\mathrm{I}}{n},$$

d'oir

$$OG = \frac{oy}{n} = \frac{o_1 y_1}{n} = \frac{\mathfrak{F}}{n};$$



de plus, le point O sera le point de croisement des médianes du triangle ABC, il suffit de prouver que OM est égal à $\frac{m}{3}$.

On a, en effet,
$$\gamma O : \gamma o = 1: n$$
, d'où $\gamma O = \frac{\gamma o}{n}$;

or, à cause de

$$oM = \frac{m}{3n}$$
, $\gamma B = \frac{(2n-1)m}{3n}$ et $BM = m$,

il vient

$$\gamma o = BM - B\gamma - oM = m\left(1 - \frac{2n-1}{3n} - \frac{1}{3n}\right) = \frac{m}{3},$$
one,
$$\gamma O = \frac{m}{3n},$$

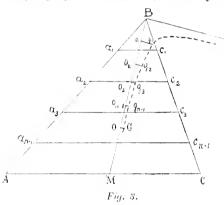
douc.

et

$$OM = \gamma o - \gamma O + oM = \frac{m}{3} - \frac{m}{3n} + \frac{m}{3n} = \frac{m}{3}$$

C. Q. F. D.

Conséquences. — a Si l'on considère fiq. 3) les triangles $a_1 B c_1, a_2 B c_2, \ldots, a_{n-1} B c_{n-1}, ABC$ ayant un sommet commun



et leurs aires respectivement proportionnelles aux nombres 1,4,... $(n-1)^2$, n^2 , — ces triangles étant constitués moyen de a_1Bc , de la même manière que dans le Théorème — les $G \otimes g_1, g_2, \dots g_{n-1}, G$ sont des points

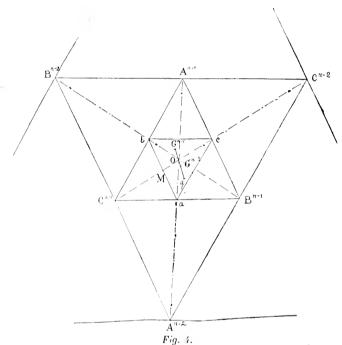
d'une même branche d'hyperbole dont le centre est en B, l'une des asymptotes est la médiane et l'autre une droite parallèle à $o_1 y_1, \ldots OG$.

b) Si l'on divise un triangle ABC en quatre triangles égaux, puis le triangle central A'B'C' en quatre autres triangles égaux, et ainsi de suite, le nième triangle étant, par exemple, abc, les EMD de ces triangles seront confondus en un seul point O.

Le Théorème sera applicable, si l'on suppose que les triangles égaux sont de même substance, quoique non homogène.

Si g (fig. 4) est le $\mathfrak{C}\mathfrak{G}$ de abc, \mathfrak{G}^{n-1} , le $\mathfrak{C}\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{A}^{n-1}\mathfrak{B}^{n-1}\mathfrak{C}^{n-1}$,

sera situé sur Og, mais du côté opposé à g, par rapport à O, et $O(r^{n-1})$ vaudra $O(r^{n-2})$; $O(r^{n-2})$, le $O(r^{n-2})$ de $O(r^{n-2})$, sera situé



sur Oy, du même côté que g et OG^{n-2} vaudra $\frac{OG^{n-1}}{2}$, et ainsi de suite; si l'on désigne par 1, 2, 3, 4 ... les GG des triangles successifs, on aura la disposition $\frac{2}{2}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{3}$ suivante (fig. 5).

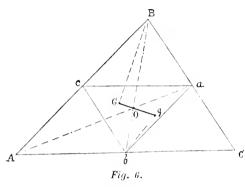
Le point O sera reg. s. toujours compris entre deux 66 dont les numéros d'ordre seront de parités contraires.

La fig. \hat{s} n'est d'ailleurs que la traduction graphique de la formule

$$\frac{1}{3} = \lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \cdot \cdot \right) \cdot$$

On peut donc considérer ces points comme donnant, par approximations successives, la position du point O, qui n'est que le & de tous les triangles centraux, dans le cas de l'homogénéité de la substance.

c) Si l'on admet que les CO de deux triangles, ou plus généralement de deux polygones, semblables et de même substance sont des points homologues, on peut déduire du Théorème une démonstration de la coïncidence du CO d'un



triangle homogèneavecle CMD de ce triangle.

En effet, supposons (fig. 6) un triangle homogène ABC divisé en quatre triangles égaux et semblables au premier et soit g le && de abc; en vertu

du Théorème, le CGG du triangle ABC sera sur Og et du côté opposé à g, par rapportau point O, et on aura $OG = \frac{Og}{2}$.

Comme bg est égale à la moitié de BG, quelles que soient la grandeur et la direction de Og, BG ne pourra pas être, dans ABC, l'homologue de bg du triangle abc, à moins que Og ne soit nul; alors, G, O et g coïncident.

C. Q. F. D.

d) Si on reprend le Théorème dans le cas d'une substance homogène, la division du triangle ABC (fig. 1) en triangles plus petits pourra être poussée aussi loin que l'on voudra, sans que la répartition des densités des différents points des triangles constitutifs égaux change de l'un à l'autre triangle.

En supposant qu'on ait pris g, comme centre de gravité du triangle homogène Ab_1c_1 , l'erreur commise δ sera réduite à $\frac{\delta}{2}$ dans le triangle ABC. Or, comme on peut augmenter

n indéfiniment, ce qui fait tendre δ vers zéro, la quantité $\frac{\delta}{n}$ pourra devenir plus petite que toute quantité donnée, donc nulle; le point O sera le SC du triangle homogène ABC.

- 2. Soit un tétraèdre ABCD décomposé, au moyen de (n-1) plans équidistants et parallèles à chacune de ses faces, en trois espèces de solides :
- 1º $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ tétraèdres égaux entre eux et semblables au tétraèdre primitif, constituant une pile triangugulaire de côté n
- 2º $\frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}$ octaèdres possédant chacun un centre de symétrie et formant une pile triangulaire de côté de n-1;
- 3º $\frac{(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3}$ tétraèdres symétriques de ceux du 1º, disposés en une pile triangulaire de côté n-2.

Soient, de plus, les tétraèdres du 1º formés d'une substance non homogène, néanmoins identique pour tous les tétraèdres, et telle que les densités de tous les points soient respectivement les mêmes que celles des points symétriques des tétraèdres du 3º, lesquels seront alors formés d'une substance non homogène, néanmoins identique pour tous ces tétraèdres.

Soient, enfin, dans les octaèdres du 2°, les points symétriques ayant des densités égales. Alors :

Théorème. — Le COg₁ d'un tétraèdre constitutif Ab₁c₁d₁ étant à une distance è de.o₁,

étant à une distance à de.o., (MD) de ce tétraédre, le (MG) du tétraédre ABCD ssra à une distance $\frac{\delta}{n}$ de O, (MD) du tétraédre primitif, et la droite OG sera parallèle à o_1g_1 .

Il est facile de reconnaître que si g_1 est le (6) du tétraèdre $Ab_1c_1d_1$ (fig. 7)

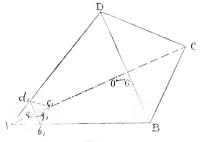


Fig. 7.

et si è est la distance de g_1 à o_1 , CMD de ce petit tétraèdre.

ou

le CGG, de la pile triangulaire du 1º sera encore à la distance à du point O, et que OG, sera parallèle à $o_i g_i$.

De même pour la pile triangulaire du 3°, seulement OG3

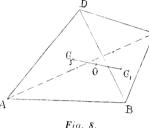


Fig. 8.

qui vaudra OG, sera dirigé en sens opposé.

Quant au (50) de la du 2º, il sera au point O luimême.

On aura donc la disposition indiquée par la fig. 8.

Les charges en G, 0 et G, seront respectivement:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$
, $\frac{4(n-1)n(n+1)}{6}$ et $\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$,

le poids d'un tétraèdre du 1º étant représenté par 1.

Le & G' de G, et G, sera donné par

$$G_{1}G' = \frac{\frac{(n-2)(n-1)n}{6}}{\frac{(n-2)(n-1)n+n(n+1)(n+2)}{6}} G_{1}G_{3}$$
ou
$$G_{1}G' = \frac{(n-2)(n-1)}{n^{2}+2} \delta.$$

$$G'_{1}G'_{1} = \frac{(n-2)(n-1)}{n^{2}+2} \delta.$$

 $OG' = OG_1 - G'G_1 = \frac{3n}{n^2 + 2n} \delta.$ d'où

La charge du point G' sera $\frac{2(n^2+2)n}{6}$, celle du point O $\frac{4n(n^2-1)}{6}$, donc la charge totale sera égale à n^3 .

Dès lors, le & définitif G, qui coïncide avec celui des points O et G', sera déterminé par

$$OG = \frac{n(2n^2 + 4)}{6}OG' : n^3 = \frac{n(2n^2 + 4)}{6n^3} \times \frac{3n}{n^2 + 2} \delta$$

$$OG = \frac{\delta}{n}.$$

C. Q. F. D.

Conséquence. — Si le tétraèdre ABCD est formé d'une substance homogène, la conséquence (d) donnée pour le cas du triangle s'applique au tétraèdre, c'est-à-dire que le point 0 est le & du tétraèdre homogène ABCD.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE LA FORMULE

$$\frac{\lg \frac{A+B}{2}}{\lg \frac{A-B}{2}} = \frac{a+b}{a-b}.$$
 (*)

Par M. E. Brand.

Soit le triangle ABC; a, b, c désignant les longueurs des côtés opposés respectivement aux angles A, B, C.

Portons, dans la direction des côtés,

$$CD = CD' = CB,$$

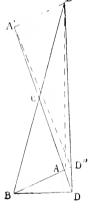
 $CA' = CA.$

La droite A'D' sera parallèle à BA ; l'angle BDD' étant droit, l'angle CBD vaudra $\frac{A+B}{2}$

et l'angle ABD aura pour valeur $\frac{A-B}{2}$.

De plus, on a A'D = a + b et AD = a - b.

Les triangles A'D'A et A'D'D", ayant la même base A'D' et les sommets situés sur la parallèle BAD", sont équivalents; il en résulte que les triangles A'D"D et D'AD



sont aussi équivalents. Comme ces triangles ont l'angle ADD" commun, ils sont entre eux comme les produits des côtés

^(*) Voyez le Journal, p. 15 et 64.

Nous donnerons, dans le prochain numéro, une note consacrée à l'établissement de certaines formules de la trigonométrie par la voie géométrique. Ce rapprochement entre la trigonométrie et la géométrie n'a rien qui doive surprendre; toute formule trigonométrique étant l'expression d'une vérité géométrique.

qui comprennent cet angle. L'équivalence de ces triangles donne $A'D \times DD'' = AD \times DD'$.

Or, DD" et DD' sont proportionnelles à $tg \frac{A-B}{2}$ et $tg \frac{A+B}{2}$,

done $(a + b) \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = (a - b) \operatorname{tg} \frac{A + B}{2}.$

NOTICE HISTORIQUE SUR LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. Aubry.

(Suite, voir page 105.)

Les Indiens, déjà au temps d'Aryabhata, employaient les sinus au lieu de cordes: du moins voit-on dans cet auteur la première table de sinus connue. Elle donne les sinus des angles de 3° 45′ en 3° 45′ avec les différences. Le sinus de 3° 45′ est facile à trouver; pour les autres, il emploie la formule donnant le sinus de la somme de deux arcs (*).

Les Arabes perfectionnèrent et simplifièrent la trigonométrie en beaucoup de points, surtout en creant des procédés plus généraux que ceux employés jusqu'alors. Albategni (milieu duix esiècle) substitueles sinus (**) aux cordes, et donne diverses tables astronomiques; Ebn-Jounis (fin du x esiècle) trouve la formule remplaçant un produit de sinus par une

 $\sin (A_1 + A_2) = \sin A$ $= \frac{a'}{c} \cdot \frac{h}{b} + \frac{a''}{b} \cdot \frac{h}{c} = \sin A_1 \sin C + \sin A_2 \sin B$ $= \sin A_1 \cos A_2 + \sin A_2 \cos A_1.$

Fig. 11. Cette démonstration a été donnée par Cauchy (Rés. anal.) et retrouvée, plusieurs fois, depuis.

^(*) Cette formule a probablement été d'abord démontrée ainsi: Le double de la surface du triangle ABC (fig. 11) peut s'écrire des deux manières suivantes : $bc \sin A$, ou a'h + a''h, h désignant la hauteur AD, a'où

^(**) Dans la première édition de sou Histoire des Mathématiques, Montuela donne, comme origine du mot sinus, l'expression semisses inscriptarum par laquelle on désignait les demi-cordes et qu'on écrivait s. ins, d'où par corruption serait venu sinus. Mais il est hors de doute que ce mot n'est autre chose que la traduction latine d'un mot arabe.

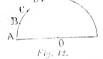
somme d'autres sinus, imagine les tangentes et les sécantes, et donne des tables de minute en minute jusqu'au quart de la circonférence; Aboal-Djoud (commencement du 1x° siècle) prélude à la découverte de la théorie des sections angulaires (note) en donnant l'équation qui lie les côtés de l'hexagone et de l'ennéagone inscrits (*); Geber (milieu du x1° siècle) trouve la formule tondamentale de la trigonométrie sphérique; Ouloug-Beg (milieu du xy° siècle) donne de nouvelles méthodes pour la construction des tables de sinus de degré en degré: l'une est un ingénieux perfectionnement de celle de Ptolémée (**); par la deuxième, il déduit directement la valeur de sin 1° de celle de sin 3°, en résolvant une équation du troisième degré (***).

En Europe, la trigonométrie fut d'abord cultivée et la pratique des calculs trigonométriques perfectionnée par Purbach

(*) Soit l'arc AB [fig. 12] répété deux fois en BC et CD : le théorème de Ptolémée donne

 $\overline{AD}^3 = 3.\overline{AO}^2.AD - \overline{AO}^2.CD.$

Ceci n'atténue pas le mérite de la découverte de B/Viète: les travaux des Arabes ont de tout temps été peu connus directement, et ceux que nous citons, entre autres, retrouves tent récemment.



(**) Par le théorème de Ptolémée, on a facilement les sinus des angles de 3°, puis de $a=\pm5'$, b=56'+5'', $c=\pm°7'30''$. Or la différence des sinus de 1° et de b est plus petite que le tiers de celle des sinus de b et de a; on peut donc écrire

$$\sin \tau^{\circ} < \frac{1}{3} \sin h - \frac{1}{3} \sin a.$$
On a de même
$$\sin \tau^{\circ} - \sin h > \frac{1}{3} (\sin r - \sin h).$$

d'où

$$\sin t^{\circ} > \frac{2}{3} \sin b + \frac{1}{3} \sin a.$$

On a ainsi deux limites très rapprochées de sin 1°.

(***) La relation d'Aboul-Djoud donne

$$\sin x^{\circ} = \frac{\sin 3^{\circ}}{3} + \frac{4 \sin^{3} x}{3}.$$

Il résout cette équation par fausse position, en posant comme première approximation $\sin \tau^\circ = \frac{\sin 3^\circ}{3}$, remplaçant dans (α) $\sin \tau^\circ$ par cette valent, ce qui donne pour le premier membre une deuxième approxima-

valent, et din donne pour le premier membre the deuxiente approximation dont il ne garde que les minutes du rayon; il remplace cette valeur, ce qui donne une troisième approximation, dont il conserve les minutes et les secondes. Et ainsi de suite.

et Regiomontanus. On leur doit l'extension des tables à toutes les minutes du quart de cercle et la première idée des fractions décimales: au lieu de la division de Ptolémée. Purbach divise le rayon en 600 000 parties et Regiomontanus en 1000 000. Leur méthode d'interpolation des sinus des angles de minute en minute consistait en un tâtonnement fondé sur le lemme de Ptolémée rapporté plus haut.

Viète a fait faire de grands progrès, à la science dont l'histoire nous occupe, par ses théorèmes de trigonométrie sphérique, qu'il a beaucoup simplifiée (Var. de rebus math., Tours. 1593). Il a aussi donné (Canon mathemaicus, Paris, 1579) une savante méthode de calcul du sinus de 1' (*), pour laquelle il avait imaginé sa fameuse théorie des sections angulaires (voir la note à la fin de cet article), et commencé ses recherches sur la théorie et la résolution des équations.

Rheticus entreprit la construction d'une table des lignes trigonométriques des arcs de dix en dix secondes (**), travail terminé par Pitiscus, et publié en 1596 sous le nom d'Opus palatinum. Il suppose le rayon divisé en 10 000 000 000 000 000 parties, ce qui, aujourd'hui. s'appellerait calculer avec quinze décimales. C'est de l'Opus palatinum qu'ont été tirées les tables trigonométriques en usage encore aujourd'hui.

Au sujet du calcul des tables, il n'y a plus guère à citer que les méthodes modernes fondées sur l'emploi des séries ou des differences et appliquées aux tables centésimales, dites du cadastre, exécutées, en 1795, par ordre de la Convention, et dont la publication serait de la plus haute utilité si la division centésimale venait à être adoptée (***). Sion comprend que l'astronomie - en raison des observations consignées

^(*) Par la quintisection de l'angle de 180, il trouve le sinus de 3° 36'; par deux trisections et une bissection de l'angle de 60°, il arrive à celui de 3°20'; d'où les sinus de 16' et par suite ceux de 8', 4', 2' et 1'.

^(**) Par des bissections de l'angle 30 répétées un grand nombre de fois, il arrive à l'arc dont le cosinus est 999 999 999 999 999. Il remonte ensuite par des additions d'arcs convenables aux arcs dont il désire les cosinus. Nous donnons ces renseignements surtout pour montrer à quels immenses calculs ont dû se livrer les auteurs des premières tables trigonométriques.

^(***) L'idée de la division centésimale est due à Briggs, qui avait d'abord calculé des tables de logarithmes trigonométriques dans cette division.

en numération sexagésimale depuis de si nombreux siècles, — ne puisse abandonner cette division de la circonférence, on ne s'explique guère que la navigation et la géodésie, par exemple, tardent tant à opérer ce changement, qui certainement, tôt ou tard, se fera.

On doit à Neper deux perfectionnements au point de vue de la pratique du calcul : l'application des logarithmes aux tables ; et les formules qui portent son nom. Ces deux découvertes se trouvent dans son célèbre *Mirifici canonum descriptio* (Edimburgh, 1614).

Jusque là, la trigonométrie était appliquée exclusivement aux besoins de l'astronomie; on commença alors à l'envisager pour elle-même. La quadrature des triangles sphériques a été donnée par Albert Girard (Inv. nouv. en alg., Amsterdam, 1629), et sa formule a été démontrée par Cavalieri. On connaît les théorèmes de Lexell, de Gudermann, etc., constituant le commencement de ce qu'on a appelé la géométrie de la sphère et dans laquelle il reste tant à découvrir.

La découverte des séries trigonométriques, commencée par Newton, et continuée par James Gregory, Leibniz, les Bernoulli, Euler, a fait de la trigonométrie analytique une des parties les plus riches de l'analyse. La trigonométrie imaginaire, due aux travaux de Moivre et de Lambert, a ouvert des voies nouvelles; plusieurs d'entre elles touchen aux points les plus élevés de la science et sont loin d'être entièrement explorées.

L'ouvrage le plus complet sur la trigonométrie est le célèbre Traité de Cagnoli, où l on voit, outre l'exposition de la science pure, les applications principales à l'astronomie, à la navigation, à la géodésie, etc. Dans un cadre plus élémentaire, on a de nombreux ouvrages excellents, parmi lesquels nous mentionnerons celui de J.-A. Serret.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. A. Boutin.

394. — Ayant posé :

 $S_n = x^2 + (x + r)^2 + (x + 2r)^2 + \dots + [x + (n - 1)r]^2$. vérifier les identités suivantes qui décomposent algébriquement S_n en une somme de quatre carrés au plus :

$$\begin{array}{l} \mathbf{S}_{6} &= (2x + 3r)^{2} + (x + 6r)^{2} + (x + 3r)^{2} + r^{2}, \\ \mathbf{S}_{7} &= (2x + 4r)^{2} + (x + r)^{2} + (x + 5r)^{2} + (x + 7r)^{3}, \\ \mathbf{S}_{8} &= (2x + (1r)^{2} + (2x + 3r)^{2} + (3r)^{2} + r^{2}, \\ \mathbf{S}_{10} &= (3x + (4r)^{2} + (x + 3r)^{2} + (8r)^{2} + (4r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{11} &= (3x + (5r)^{2} + (x + 5r)^{2} + (x + 2r)^{2} + (10r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{12} &= (3x + (2r)^{2} + (2x + 3r)^{2} + (x + 5r)^{2} + x^{2}, \\ \mathbf{S}_{13} &= (3x + 24r)^{2} + (2x + 25r)^{2} + (x + 5r)^{2} + r^{2}, \\ \mathbf{S}_{14} &= (3x + (2r)^{2} + (2x + 25r)^{2} + (x + 5r)^{2} + (x + r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{15} &= (3x + 3(r)^{2} + (2x + 2r)^{2} + (x + 7r)^{2} + (x + r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{16} &= (4x + 30r)^{2} + (18r)^{2} + (4r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{17} &= (4r + 34r)^{2} + x^{3} + (18r)^{2} + (2r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{19} &= (3x + 44r)^{2} + (3x + 10r)^{2} + (2r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{20} &= (4x + 47r)^{2} + (2x + r)^{2} + (16r)^{2} + (2r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{21} &= (4x + 47r)^{2} + (2x + r)^{2} + (16r)^{2} + (2r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{22} &= (3x + 44r)^{2} + (3x + 30r)^{2} + (2x + 3r)^{2} + r^{2}, \\ \mathbf{S}_{23} &= (3x + 53r)^{2} + (3x + 30r)^{2} + (2x + 28r)^{2} + (x + 11r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{24} &= (4x + 65r)^{2} + (2x + 7r)^{2} + (2x + 28r)^{2} + (x + 11r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{25} &= (5x + 65r)^{2} + (2x + 7r)^{2} + (2x + r)^{2} + (7r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{25} &= (5x + 65r)^{2} + (2x + 3r)^{2} + (2r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{25} &= (5x + 65r)^{2} + (2x + 3r)^{2} + (2r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{26} &= (5x + 65r)^{2} + (2x + 3r)^{2} + (2r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{27} &= (5x + 66r)^{2} + (2x + 3r)^{2} + (2r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{30} &= (5x + 69r)^{2} + (2x + 3r)^{2} + (2r)^{2} + (2r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{30} &= (5x + 69r)^{2} + (2x + 53r)^{2} + (x + 6r)^{2} + (36r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{31} &= (5x + 69r)^{2} + (2x + 53r)^{2} + (x + 16r)^{2} + (2r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{33} &= (5x + 98r)^{2} + (4x + 26r)^{2} + (4r + 15r)^{2} + (4r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{34} &= (5x + 105r)^{2} + (2x + 12r)^{2} + (36r)^{2} + (x + 6r)^{2} + (44r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{35} &= (5x + 104r)^{2} + (3x + 12r)^{2} + (3r)^{2} + (x + 6r)^{2} + (4r)^{2}, \\ \mathbf{S}_{36} &= (6x + 105r)^{2} + (62r)^{2} + (7r)^{2} + (55r)^{2} + (34r)^{2}, \\$$

395. — Sommer la suite :

$$S = 1 + 1 + 2 + 4 + 7 + \dots + u_n.$$

$$(u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3}).$$

On trouve
$$S = \frac{u_{n+2} + u_n - 1}{2}.$$

396. — On peut toujours trouver nº entiers positifs, en progression arithmétique, et tels que la somme de leurs carrés soit un carré. (Voir J. M. E. Ex. divers. nºs 302 à 308, 369 à 372.)

On a à résoudre en nombres entiers l'équation :

$$6n^2x^2 + 6n^2(n^2 - 1)rx + n^2(n^2 - 1)(2n^2 - 1)r^2 = 6k^2,$$

où x désigne le plus petit des entiers considérés, r la raison et k^2 la somme des carrés des termes.

Cette équation se ramène à

$$k^{2} - n^{2}(n^{4} - 1)r^{2} = 12y^{2},$$

$$k^{2} - y^{2} = \frac{n^{2}(n^{4} - 1)r^{2}}{12}$$

ou bien

qui est toujours possible ; alors

$$x = \frac{y}{n} - \frac{(n^2 - 1)r}{2}$$

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

(CONCOURS DE 1895)

Solution par M. H. Harivel, professeur de mathématiques (*.

PREMIÈRE PARTIE

Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la différence α des côtés de l'angle droit et la différence β de l'hypoténuse et de la hauteur. — Discuter.

Soient x, y les longueurs des côtés de l'angle droit; z, l'hypoténuse; v, la hauteur.

On a

$$(1) x - y = z,$$

$$(2) x^2 + y^2 = z^2,$$

$$(4) xy = zv.$$

Élevons (1) au carré; en tenant compte des équations (2) et (4), on a

$$z^2-2zv=x^2.$$

De (3), on tire $v = z - \beta$;

^(*) Nons avons reçu une solution analogue de M. l'abbé Rebout, protesseur au collège de Belley.

On aura donc

ou (5)
$$z^{3} - 2z(z - \beta) = \alpha^{3},$$
$$z^{2} - 2\beta z + \alpha^{2} = 0.$$

Cette équation a ses racines réelles, si l'on suppose

$$\beta^2 - \alpha^2 \geqslant 0$$
;

c'est-à-dire si β est supérieur ou égal à a.

Mais, a priori, l'hypoténuse doit être plus grande que β , et comme $f(\beta) = -\beta^2 + \alpha^2$, quantité négative, la plus grande racine peut seule convenir à la question. Nous avons donc

$$z = \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}.$$

Pour achever de déterminer le triangle, calculons v.

Nous avons vu que $z^2 - 2zv = \alpha^2$;

d'ailleurs
$$z = v + \beta$$
,

d'où

$$(v + \beta)^2 - 2(v + \beta)v = \alpha^2,$$

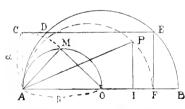
$$v = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2},$$

 β étant $> \alpha$, la seule condition est

$$2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \leqslant \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2},$$
$$\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \leqslant \beta.$$

ou

condition toujours vérifiée, puisque β est positif



une seule solution, si $\beta > \alpha$; pas de solution, si $\beta < \alpha$. Construction géométrique. — Prenons $AB = 2\beta$, $AC = \alpha$; AF est la plus grande racine de l'équa-

En résumé.

tion (3); d'ailleurs, $OM = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. Décrivons, sur AF comme diamètre, une circonférence; si PI = OM, le triangle APF est le triangle cherché.

DEUXIÈME PARTIE

On donne deux circonférences concentriques et un point P sur l'une d'elles. On mêne, par le point P, dans les deux circonférences, les cordes rectangulaires PA et BPC. Ces cordes tournent autour du point fixe P,

I' Démontrer que $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ est une somme constante.

2º Que la somme des carrés des côtés du triangle ABC est aussi constante.

3º Démontrer que le centre de gravité du triangle ABC est fixe.

4º Trouver les lieux décrits par les milieux des côtés du triangle ABC.

1º Soient ret R les rayons des deux circonférences; élevons IO perpendiculaire sur PC et traçons OP.

Nous avons
$$\overline{\mathrm{OI}^2} + \overline{\mathrm{PI}^2} = r^2;$$

$$\frac{\overline{\mathrm{PA}^2}}{4} + \left(\frac{\mathrm{PC} - \mathrm{CO}}{2}\right)^2 = r^2.$$

$$\frac{\overline{\mathrm{PA}^2}}{4} + \frac{\overline{\mathrm{PC}^2}}{4} + \frac{\overline{\mathrm{PB}^2}}{4} - \frac{\mathrm{PC}.\mathrm{PB}}{2} = r^2.$$
Mais
$$\mathrm{PG} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PE} \times \mathrm{PF} = \mathrm{R}^2 - r^2,$$

$$\mathrm{donc} \ \overline{\mathrm{PA}^2} + \overline{\mathrm{PC}^2} + \overline{\mathrm{PB}^2} = 4\left(r^2 + \frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{2}\right) = 2(\mathrm{R}^2 + r^2).$$

2º Pour prouver que la somme des carrés des côtés du triangle ABC est constante, observons que

$$\begin{split} \overline{AB}^2 &= \overline{BP}^2 + \overline{PA}^2, \\ \overline{AC}^2 &= \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2, \\ \overline{BC}^2 &= (BP + PC)^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + 2(R^2 - r^2); \end{split}$$

d'où

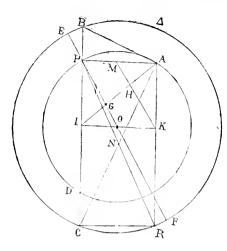
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2) + 2(R^2 - r^2)$$

= $4(R^2 + r^2) + 2(R^2 - r^2)$
= $6R^2 + 2r^2$ = constante.

3º Le centre de gravité est fixe.

Construisons le rectangle ayant pour côtés PA et PI, joignons KM, M milieu de AP, H point de rencontre de KM avec AI et G point de rencontre de AI avec PO. Le point O étant le milieu de IK et lepoint M le milieu de AP, les triangles semblables donnent successivement IG = GH = AH.

G étant au tiers de AI, ce point est le centre de gravité du triangle ABC.



Or,
$$\frac{OG}{GP} = \frac{IO}{AP} = \frac{I}{2}$$
, donc le point G, situé liers de OP à partir du point O, est un point fixe.

4º Lieu des milieux des côtés du triangle ABC.

Le lieu du milieu I du côté BC est évident, car l'angle PIO étant droit, ce lieu est la circonférence décrite sur OP comme diamètre.

Pour trouver le lieu du milieu de AC, nous construisons le rectangle APCR dont le sommet R, pour des raisons évidentes, appartient à la circonférence Δ : N milieu de AC est aussi le milieu de la deuxième diagonale PR du rectangle.

Ainsi, tout revient à trouver le lieu du milieu des droites, issues d'un point P, et limitées à cette circonférence.

Ce lieu est la figure homothétique à la circonférence Δ , c'est-à-dire une circonférence ayant un rayon moitié du rayon de Δ et dont le centre est sur PO.

C'est aussi le lieu du milieu du côté AB.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

(Concours de 1895.)

Épure.

Une sphère de centre O, de rayon égal à gem est tangente au plan horizontal. Soient AB, un diamètre horizontal de la sphère, C, le milieu du rayon OA. D, le point le plus élevé de la sphère. Par les trois points B, C, D, mener trois parallèles faisant des angles de 45° avec le plan horizontal et perpendiculaires à la direction AB. Trouver la projection horizontale de l'intersection de la sphère et de la surface prismatique indéfinie ayant ces trois parallèles pour arètes latérales.

Représenter la portion (supposée opaque) de la sphère comprise dans la surface prismatique. Construire les sommets des ellipses formant la projection de l'intersection, et écrire les cotes des points correspondants.

Mener les tangentes à ces ellipses en leurs points situés sur les projec-

tions des arètes.

Construire les projections des points de l'intersection déterminés par le plan horizontal de cote 16.

Mener à l'intersection les tangentes parallèles aux côtés du triangle BCD et écrire les cotes des points de contact.

ÉCOLE NAVALE

(Concours de 1895.)

Composition de géométrie et de géométrie analytique.

I. Exposer succinctement le principe de la méthode des isopérimètres

pour le calcul de π .

II. Dans un triangle sphérique ABC, si la somme des deux angles B et C est égale à deux droits, la somme des deux côtés AB et AC est égale à une demi-circonférence. En conclure que si on se donne A et la somme B+C=2 dr., le côté BC passe par un point fixe.

III. Soient OX et OY, deux axes rectangulaires; A, B deux points

sur ces axes; M, N les milieux de OA et de BA. On considère:

1° L'hyperbole équilatère de centre M tangente en O à l'axe des Y. 2° L'hyperbole équilatère de centre N tangente en B à l'axe des Y.

Construire les asymptotes de ces hyperboles.

Elles se coupent deux à deux en quatre points qui sont les centres des

cercles inscrit et exinscrits au triangle AMN.

Les points de rencontre de ces hyperboles, autres que A, sont à l'intersection de la circonférence circonscrite au triangle OAB et de la parallèle à l'aze des X, menée par N.

Lieu des points de rencontre de ces hyperboles;

Lieu des points de rencontre des asymptotes lorsque A et B se déplaçant respectivement sur l'axe des X et des Y, la longueur AB reste constante.

On posera

A = 2a, OB = 2b, AB = 2l.

Epure.

Une sphère de rayon $R=50^{mm}$ est tangente au plan horizontal de coté O, au point O. D'un point A, situé dans ce plan, à une distance $OA=100^{mm}$, on mène successivement:

l° Les deux tangentes à la sphère faisant avec la verticale un angle de 40°;

 $2^{\rm o}$ Les deux tangentes à la sphère faisant avec l'horizontale OA un angle de 23°.

Ces quatre tangentes étant considérées comme les arêtes d'une pyramide indéfinie, de sommet A, tracer la projection du volume commun à la sphère et à cette pyramide.

Calcul logarithmique.

Calculer l'angle x compris entre o et π qui vérifie l'équation $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^3 359^\circ 22' 13'',7 \ \text{tg} \ 2143^\circ 49' 35'',8}{(0,365 \ 247)^2 \cos^3 91^\circ 15' \ 32'',6} \cdot \\ o < x < 180^\circ.$

Composition d'algèbre.

I. — Convergence des séries dont les termes sont alternativement

positifs ou négatifs.

II. — On donne une demi-circonférence ACB, de rayon OC = R. On demande de déterminer sur les tangentes aux extrémités du diamètre deux points D et E (AD = x, BC = y) tels que DE soit tangent à la demi-circonférence; et que la surface de la sphère engendrée par la demi-circonférence FDEG, circonscrite au trapèze ADEB, en tournant autour de AB soit égale à m fois la surface totale du tronc de cône engendré par le trapèze.

III. — Calculer à 0,001 près, les racines de l'équation

 $x^4 + \pi x^2 - 7.6 = 0.$

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

(Concours de 1895.)

Mathématiques .

I. — On veut rembourser un capital C au moyen d'une annuité a payable à la fin de chaque année; on demande quel est l'amortissement pendant la $p^{\rm ème}$ année, c'est-à-dire de combien la dette a-t-elle diminué de la fin de la p-1 ème année à la fin de la $p^{\rm ème}$? Discuter la formule trouvée.

Application:

C = too.ooo francs.

$$a = 10.000$$
 francs.
 $r = 0.05$ (taux pour 1 franc).
 $p = 8$.

II. — Étant donné un rectangle ABCD, à quelle distance du côté AD doit-on meuer une parallèle EF à ce côté, pour que le rapport de la diagonale AF, du rectangle AEFD ainsi formé, à EB soit égal à un nombre donné m:

$$\frac{AF}{EB} = m?$$

Discussion (*).

^(*) On voit que, d'après l'énoncé même, le point F est à l'intersection de CD avec la circonférence décrite sur MM' comme diamètre; M, M' étant les points qui partagent AC dans le rapport donné m. Cette solution géométrique, évidente, permettait de retrouver très simplement, par des considérations géométriques, les résultats fournis par la discussion demandée.

BACCALAURÉATS

Académie de Grenoble (*).

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Dans un triangle rectangle BAC, on donne l'hypotènuse a et la somme l de la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse et de l'un des segments qu'elle détermine sur cette hypotènuse.

Déterminer cette bauteur algébriquement ou géométriquement. Dis-

eussion, en supposant a fixe et l variable.

II. - Fraction ordinaire génératrice de 0,37432432...

2º Questions au choix: (a) Recherche du p. g. c. d. de deux nombres par la méthode des divisions successives.

(b) Tout nomi re qui divise un produit de deux facteurs et qui est

premier avec l'un d'eux divise l'autre.

(c) Réduction d'une fraction ordinaire à sa plus simple expression.

3° Problème. — Les trois faces d'un angle trièdre OABC sont des angles droits. On prend sur deux des arêtes deux longueurs égales données OA = OB = u, et sur la troisième une longueur variable OC = x. On demande de déterminer x par la condition que le volume du tétraèdre OABC soit égal au produit de sa surface totale par une longueur donnée m

positive $\frac{m}{3}$. — Maximum de m.

Académie de Lille.

Questions au choix: 1º Étudier la fonction $y = \csc x$. On traitera sculement les questions suivantes: définition, variations. Condition pour que l'équation cosée x = z admette des solutions; formule pour passer de l'une d'elles à toutes les autres. — Formes diverses de la relation qui lie les deux arcs dont les cosécantes sont égales et de même signe ou égales et de signes contraires.

2º Montrer que le système

entraine le suivant
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad A + B + C = 180^{\circ}.$$

 $a = b \cos C + c \cos B,$ $b = c \cos A + a \cos C,$

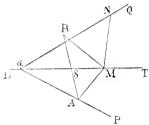
(*) Je rappelle iei, à l'aimable attention des correspondants du Journal, la note que j'ai insérée dans le n° d'avril (p. 86), note dans laquelle j'appelle leur attention sur une question donnée aux examens du baccalauréat ès sciences, à Montpellier. La question posée a-t-elle, contrairement à mon opinion, une solution élémentaire?

Quelle est cette solution?

On ne démontrera pas la réciproque, mais on mettra en évidence les conditions restrictives que doivent vérifier les élèments a, b, c, A, B, C.

3° Un angle étant donné par sa tangente seulement, on demande d'établir a priori, sans mise en équation, combien la tangente, le sinus et le cosinus de sa moitié ont respectivement de valeurs distinctes. On étudiera ensuite si ces valeurs sont réelles et on indiquera les relations qui existent entre elles.

Problème obligatoire. - On donne trois droites concourantes LT, aP, aQ



et un point A pris sur αP ; c'est-à-dire que l'on doit considérer la longueur αA et les angles $\overline{P}\alpha T$, $\overline{Q}\alpha \overline{\Gamma}$, comme donnés. On demande de trouver sur LT un point M tel qu'en menant MN perpendiculairement à LT et limitée à αQ , puis MR perpendiculaire à AM et égale à MN, et traçant AR qui coupe LT en un certain point S, on ait:

 $\overline{\alpha M} \times \overline{AS} = \overline{\alpha A} \times \overline{SM}$. On pourra donner une solution ana-

lytique ou encore déduire de la considération des changements de plans une solution géométrique.

QUESTION 546(*)

Solution par M. Georges Robriguez, étudiant à Medellin (Colombie).

Resoudre

$$(x + a) (x + b) [2x^3 + (a + b) (a + b - x)^2]$$

= $2(a + b)x[a^2(x + a) + b^2(x + b)].$
(Sollerstinsky.)

On peut mettre l'équation sous la forme

$$[x^{2} + (a+b)x + ab][2x^{3} + (a+b)x^{2} - 2(a+b)^{2}x + (a+b)^{3}]$$

$$= 2(a+b)x[(a^{2}+b^{2})x + (a^{3}+b^{3})],$$

ou

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 2x^4(a+b) + x^4(a+b) + x^3(a+b)^2 - 2x^3(a+b)^2 \\ -2x^2(a+b)^3 + 2abx^3 + 2abx^2(a+b) - 2x^2(a+b)(a^2+b^2) \\ -2x(a+b)^2(a^2+b^2) + x^2(a+b)^3 + x(a+b)^4 - abx^2(a+b) \\ +ab(a+b)^3 = 0 \end{array},$$

ou

$$\begin{array}{l} (x+a+b)[2x^4+x^3(a+b)-2x^2(a+b)^2+2abx^2\\ -2x(a+b)(a^2+b^2)+x(a+b)^3-abx(a+b)+ab(a+b)^2]=\mathbf{0}. \end{array}$$

^(*) Nous avons reçu, trop tardivement pour la signaler, une solution de la question 562 (Voyez *Journal*, p. 43) de M. José de la C. Arbelaéz, à Marimilla (Colombie).

On a donc une première racine x' égale à -(a+b). Reprenons l'équation

$$2x^{4} + x^{3}(a + b) - 2x^{2}(a + b)^{2} + 2abx^{2} - 2x(a + b)(a^{2} + b^{2}) + x(a + b)^{3} + abx(a + b) + ab(a + b)^{2} =$$

ou

$$2x^{4} + 2x^{3}(a+b) - x^{3}(a+b) - x^{2}(a+b)^{2} - x^{2}(a+b)^{2} - x(a+b)^{3} + 2abx^{2} + 2abx(a+b) + abx(a+b) + ab(a+b)^{2} = 0,$$

ou

$$(x + a + b)[2x^3 - x^2(a + b) - x(a + b)^2 + 2abx + ab(a + b)] = 0.$$

On a une nouvelle racine égale à la précédente. Enfin $2x^3-x^2(a+b)-x(a+b)^2+2abx+ab(a+b)=o$, donne

$$2x^{3} - 2x^{2}(a+b) + 2abx + (a+b)x^{2} - (a+b)^{2}x + ab(a+b) = 0,$$
ou
$$[x^{2} - (a+b)x + ab](2x + a + b) = 0,$$

$$(x-a)(x-b)(2x + a + b) = 0.$$

L'équation, en résumé, a pour racines : 1° une racine double égale à -(a+b); 2° trois racines simples $a,b,-\frac{a+b}{2}$.

QUESTIONS PROPOSÉES

650?—1º Dans tout triangle, les perpendiculaires élevées, par le centre de gravité, aux trois médianes coupent les côtés correspondants en trois points en ligne droite;

2º Si les perpendiculaires élevées par le centre de gravité aux médianes BM', CM" coupent respectivement AC, AB en F, F'; la droite FF' coupe BC en un point A", situé sur une droite avec les points analogues B", C". (A. Davidoglou.)

651. — Dans un cercle Γ , on considère un diamètre fixe AB et une corde mobile $\alpha\beta$ telle que, dans chaque position, on ait, en projetant β en β_1 sur AB: $\alpha\beta = \beta\beta_1$. La bissectrice de $\alpha\Lambda\beta$ coupe B β en B₁; la parallèle à AB₁, menée par B, coupe A β en A₁.

La droite $\mu\mu_1$, qui passe par les milieux μ , μ_1 des segments AB₁, A₁B, conserve sur AB une projection orthogonale constante.

(A. Davidoglou.)

652. — On donne une circonférence de cercle et un point dans son intérieur. De ce point, on mène deux droites conjuguées par rapport au cercle. Démontrer que, quelles que soient ces deux droites, la somme des inverses des carrés des cordes que le cercle intercepte sur elles est constante.

(Mannheim.)

- 653. On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point A sur Ox. Soit ω un point quelconque sur Oy et soit O' le symétrique de O. par rapport à ω. Du point ω comme centre, avec OA pour rayon, on décrit une conférence Δ qui rencontre AO' aux points E.E'. On trace OE. OE', qui coupent ω en F et F'. La droite FF' passe par le symétrique de A par rapport à O.

 (A. Davidoylou.)
- 654. Les bissectrices des angles intérieurs d'un quadrilatère ABCD forment un autre quadrilatère MNPQ. Construire ABCD connaissant MNPQ. (A. Davidoglou.)
- 655. On considère un triangle ABC et le cercle Δ , circonscrit à ABC.

Les parallèles à la tangente en A au cercle Δ , menées par les points B, C, rencontrent les côtés AC, AB, en des points A', A". La droi e A'A" coupe BC en α .

Démontrer que $A\alpha$, et les droites analogues $B\beta$, $C\gamma$ passent par un même point. G. L.

ERRATUM

Page 142. — An lien de « relation (3) », il fant comprendre la relation qu'il s'agissait de démontrer.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

SUR UN THÉORÈME INDÉPENDANT

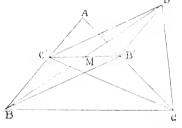
DU POSTULATUM D'EUCLIDE

Par M. G. Tarry.

Nous allons démontrer qu'un triangle est isoscèle s'il a deux bissectrices intérieures égales, sans nous appuyer sur le postulatum d'Euclide.

Lemme. — Dans un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, deux côtés opposés ne peuvent se rencontrer.

On démontre bien facilement que les perpendiculaires menées par le point d'intersection des diagonales à deux côtés opposés se confondent en une seule droite. D'où l'on conclut que deux côtés opposés, nécessairement perpendiculaires à une même droite



diculaires à une même droite, ne peuvent se rencontrer.

Théorème. — Cela démontré, je dis qu'un triangle ABC, qui u deux bissectrices intérieures égales, BB' et CC', est isoscèle.

Soit M le milieu de la droite C'B'. Prolongeons la droite BM d'une quantité égale, MD = BM. La droite B'D ne peut être à l'intérieur de l'angle C'B'A, autrement les côtés opposés B'C et B'D du quadrilatère BCDB' se rencontreraient nécessairement, ce qui est impossible.

Il résulte de là que le point B' se trouve à l'intérieur du triangle C'CD.

Supposons maintenant que les côtés AB et AC ne soient pas égaux, que AB soit plus petit que AC.

L'angle B sera plus grand que l'angle C, l'angle ABB', moitié de l'angle B, ou son égal l'angle C'DB', sera plus grand que l'angle C'CB', moitié de l'angle C.

D'autre part, si l'on compare les deux triangles BCB' et BCC', qui ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, on voit que le côté BC', ou son égal B'D, opposé à l'angle $\frac{C}{2}$, est plus petit que le côté CB' opposé

à l'angle $\frac{B}{2}$. Par conséquent, dans le triangle B'DC, l'angle B'DC, opposé au côté CB', est plus grand que l'angle B'CD,

opposé au côté B'D.

Les angles C'DB' et B'DC étant respectivement plus grands que les angles C'CB' et B'CD, et le point B' étant à l'intérieur du triangle C'CD, l'angle C'DC est plus grand que l'angle C'CD; par suite, le côté CC' est plus grand que le côté C'D, plus grand, par conséquent, que son égal BB'.

Les deux bissectrices BB' et CC' ne seraient donc pas égales,

contrairement à l'hypothèse.

Ce qui démontre, sans le secours du postulatum d'Euclide, la célèbre réciproque du théorème :

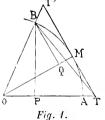
Un triangle isoscèle a deux bissectrices égales.

DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES DE QUELQUES FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE

Par M. Brand.

1. sin(a + b) = sin a cos b + sin b cos a.

On observe que la formule peut s'écrire successivement $\sin (a + b) = \cos a \cos b \cdot (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)$ $\operatorname{séc} a \cdot \sin (a + b) = \cos b \cdot (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b).$



BTT'; dès lors, on a $OT \times BP = TT' \times OM - TT' \times QM$ ou $OT \times BP = TT' \times OQ$

Soient, dans une circonférence de rayon 1, l'arc AM égal à a et l'arc MB égal à b (fig. 1). Le triangle OBT est égal à la différence des triangles OTT et

c'est-à-dire. séc $a \times \sin(a + b) = (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \cos b$, etc..

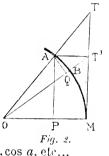
sin (a - b) = sin a cos b - sin b cos a.2.

On écrira, de même, successivement $\sin (a - b) = \cos a \cos b \cdot (\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b)$ séc $b \cdot \sin(a - b) = \cos a \cdot (\lg a - \lg b)$.

Soient (fig. 2)
$$\overline{MA} = a$$
 et $\overline{MB} = b$.

Le triangle OAT' est égal à la différence des triangles OTT' et ATT'; dès lors, on a

$$OT' \times AQ = TT' \times OM - TT' \times PM = TT' \times OP$$



$$\operatorname{s\acute{e}c} b \times \sin (a - b) = (\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b) \cdot \cos a, \operatorname{e.c.}.$$

$$sin 2a = 2 sin a.cos a.$$

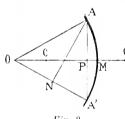


Fig. 3.

Scient (fig. 3)
$$\overline{MA} = \overline{MA'} = a$$
L'aire du triangle $\overline{OAA'}$ no

L'aire du triangle OAA' prend deux formes différentes, suivant que l'on considère la base OA' ou la base AA'. On aura ainsi

$$0A' \times AN = AA' \times OP$$

$$0A' \times AN = 2AP \times OP$$

on enfin
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
.

4.
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
.

Il faut démontrer que

$$1 \times \cos 2a = (\cos a + \sin a)(\cos a - \sin a).$$

Or (fig. 3), les points A, N et N' sont sur une même circonférence qui coupe le rayon OM en C et son prolongement en C'.

Il est facile de voir que l'on a successivement

$$OA' \times ON = OC' \times OC$$

ou
$$OA' \times OX = (OP + PC')(OP - PC),$$

 $\cos 2a = (\cos a + \sin a)(\cos a - \sin a).$ c'est-à-dire

sin(a + b) + sin(a - b) = 2 sin a.cos b.5.

Écrivons cette formule sous la forme homogène

$$1 \times [\sin(a+b) + \sin(a-b)] = 2 \sin a \times \cos b.$$

Soient (fig. 1) MA = MA' = a et $\overline{MB} = \overline{MB'} = b$. On aura, à cause de la décomposition du quadrilatère AOA'L' ou

en deux triangles OAB' et OA'B' et aussi les deux triangles OAA' et AA'B'

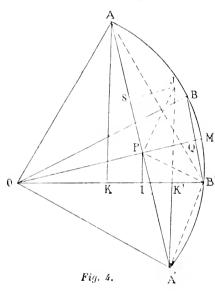
$$OB' \times (AK + A'K') = AA' \times (OP + PQ)$$

 $[\sin(a + b) + \sin(a - b)] = 2 \sin a \times \cos b.$

6. sin(a + b) - sin(a - b) = 2 cos a.sin b.

Sous une forme homogène, on a

$$1 \times \frac{\sin{(a+b)} - \sin{(a-b)}}{2} = \cos{a} \times \sin{b}.$$



Le triangle OPB' (fig. 4) a pour expressions du double de son aire OP×B'Q et OB'×PI, d'où la relation $0P \times B'Q = 0B' \times PI$. En remarquant que $PI = \frac{I}{2} (AK - A'K'),$ il vient $OP \times B'Q$ $=0B'\times\frac{1}{2}(AK-A'K'),$ c'est-à-dire $\cos a \sin b$ $=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sin{(a+b)}\\-\sin{(a-b)}\end{bmatrix}.$

7. $\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos a \cdot \cos b$. On considère encore la formule homogène

$$1 \times \frac{\cos{(a+b)} + \cos{(a-b)}}{2} = \cos{a} \times \cos{b}.$$

Le quadrilatère PIB'Q (fig. 4) est inscriptible; si donc on imagine une circonférence passant par ses quatre sommets, la propriété des sécantes issues d'un même point O, donne

$$OB' \times OI = OP \times OQ,$$

$$\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\cos(a+b)} = \cos a \times \cos b.$$

Oll

8. $\cos (a - b) - \cos (a + b) = 2 \sin a \cdot \sin b$. Comme précédemment, on écrit

$$1 \times \left\lceil \frac{\cos{(a-b)} - \cos{(a+b)}}{2} \right\rceil = \sin{a} \times \sin{b}.$$

Si l'on prolonge A'K' d'une longueur K'J telle que A'J soit égal au rayon 1, la perpendiculaire JS est égale à sin b, car $\widehat{PA'K'} = b$. Alors le triangle PJA' aura pour le double de son aire les deux expressions $PA' \times JS$ et $A'J \times IK'$ et, comme

$$ext{IK'} = rac{ ext{OK'} - ext{OK}}{2}$$
, on aura
$$ext{A'J} imes rac{ ext{OK'} - ext{OK}}{2} = ext{PA'} imes ext{JS} \,,$$
 ou
$$ext{cos} rac{(a-b)\cos{(a+b)}}{2} = \sin{a}.\sin{b}.$$

NOTICE HISTORIQUE SUR LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. Aubry.

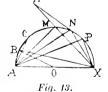
(Suite et fin.)

NOTE SUR LA THÉORIE DES SECTIONS ANGULAIRES

Cette théorie consiste à rechercher les équations auxquelles conduit la division des angles en parties égales. Les méthodes employées par Viète et ses successeurs ont une élégance qui devrait bien les sauver de l'oubli.

Les théorèmes de Viète peuvent être présentés ainsi :

I. — Considérons les arcs égaux AB, MN, NP (fig. 13) et le diamètre AX; joignons les points B, M, N, P au point X et prenons sur MX le point H tel que



NH = NX. Les triangles NHX, BOX sont semblables et de plus HM = PX. Donc

$$\frac{BX}{OX} = \frac{HX}{NX} = \frac{MX + PX}{NX},$$

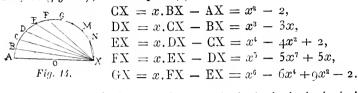
$$PX = \frac{NX \cdot BX}{OX} - MX.$$

d'où

Si on fait avec Viète OX = I, BX = x (*), cette relation devient

PX = x.NX - MX.

Soient maintenant les arcs successifs égaux AB, BC, CD, DE.... (fig. 14); on a d'après (a)



II. — On a de même (fig. 13)
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AM + AP},$$
 où
$$AP = \frac{AN.AC}{AB} - AM$$

d'où

ou, en posant AB = 1, AC = x.

AP = x.AN - AM.

De là le tableau suivant (fig. 14)

$$AD = x.AC - AB = x^2 - 1,$$

 $AE = x.AD - AC = x^3 - 2x,$

$$AF = x . AE - AD = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$AG = x \cdot AF - AE = x^5 - 4x^3 + 3x.$$

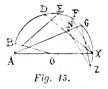
III. — Prenons sur la circonférence AX (fig. 15) les arcs égaux AB, DE, EF, FG, XZ, et joignons ZE, GA; on a NZ = GZ = XF, EZ = XD.

Les triangles ABO, EAN sont semblables, et par suite

$$\frac{EA}{BO} = \frac{EN}{BA} = \frac{XD - AF}{BA},$$

d'où, en posant BO = 1, BA = x.

(
$$\gamma$$
)
$$\begin{cases} FX = DX - x.AE. \\ DX = FX + x.AE. \end{cases}$$



^{•)} Au lieu de x et de ses puissances, x^2 , x^3 , ... x^9 , Viète écrit N, Q, C, LL, LC, CB, LQC, LCC, CCC, abréviations de numerus, quadratus, cubus, etc.

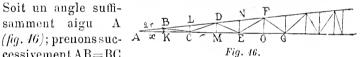
Par conséquent (fig. 14) CX = AX - x, $BA = 2 - x^2$. $DA = BA + x.CX = 3x - x^3,$ $EX = CX - x \cdot DA = 2 - 4x^2 + x^4$ $FA = DA + x.EX = 5x - 5x^3 + x^5.$ $GX = EX - x.FA = 2 - 9x^2 + 6x^4 - x^6.$

Viète donne les huit premières formules de chacun des trois tableaux qui précèdent, en expliquant la loi de formation des coefficients au moyen de ceux des formules précédentes à la manière des nombres figurés.

Oughtred (Clavis mathematica, Londres, 1631) a expliqué avec beaucoup de détails le théorème III. Il devait, ainsi qu'Harriot, la connaissance des écrits de Viète, — très rares avant leur édition par Schooten, — à Anderson, disciple de Viète, et éditeur de plusieurs de ses œuvres.

On doit à Newton une démonstration très simple des formules de ce même théorème (Lettre à Oldenbourg, 1676, et Arith. univ.).

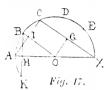
Soit un angle sufficessivement AB=BC



= CD = DE = ... L'angle A est la moitié de l'angle CBD, le tiers de l'angle DCM, le quart de l'angle EDN, etc. Les triangles ABK, ACL, ADM, AEN,... sont semblables; de là les relations

$$\begin{split} \mathrm{BL} &= \mathrm{AL} - \mathrm{AB} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AB}} \mathrm{AC} - \mathrm{AB} = \frac{x^2}{r} - 2r, \\ \mathrm{CM} &= \mathrm{AM} - \mathrm{AC} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AB}} (\mathrm{AC} = 2.\,\mathrm{AL} - \mathrm{AB}) - \mathrm{AC} = \frac{x^3}{r^2} - 3x, \\ \mathrm{DN} &= \mathrm{AN} - \mathrm{AD} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AB}} (\mathrm{AE} = 2.\,\mathrm{AM} - \mathrm{AC}) - \mathrm{AD} = \frac{x^3}{r^3} - \frac{4x^2}{r} + 2r, \\ \mathrm{EO} &= \mathrm{AO} - \mathrm{AE} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AB}} (\mathrm{AF} = 2.\,\mathrm{AN} - \mathrm{AD}) - \mathrm{AE} = \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{r^2} + 5x. \end{split}$$

Dans les Mém. de l'Acad. des sc. pour 1702, on trouve de Jacques Bernoulli, une démonstration nouvelle des mêmes



formules. Considérons dans la circonférence AX (fig. 47) les arcs égaux AK, AB, BC, et joignons BK, AC, CX. Les triangles ABO, BKX étant semblables, on a

$$\frac{BO}{BA} = \frac{BX}{BK}$$

d'où, comme $BX^2 = 4 \cdot \overline{BO}^2 - \overline{AB}^2$, et en posant AO = 1, AB = x,

$$\overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BK}}^2 = \frac{\overline{\mathrm{BA}}^2 \cdot \overline{\mathrm{BX}}^2}{\mathrm{BO}^2} = 4x^2 - x^4.$$

De même, si CE = AC,

$$\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{E}}^2 = \frac{\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^2 \cdot \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{X}}^2}{\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{O}}^2} = 16x^2 - 20x^4 + 8x^6 - x^8.$$

En général, m étant une puissance de 2, on a pour la corde m^{uple} l'expression

(a)
$$m^2x^2 - \frac{m^2(m^2-1)}{3.4}x^4 + \frac{m^2(m^2-1)(m^2-4)}{3.4.5.6}x^6 - \dots$$

Il montre par une méthode d'interpolation, peu rigoureuse d'ailleurs, que la formule (z) a lieu pour une valeur entière quelconque de m. Par la simple soustraction de 4, ces formules donneront les carrés des cordes BX, DX, EX, ...

Connaissant les expressions des carrés des cordes, il est facile d'en déduire celles de ces mêmes cordes. En effet, si G est le milieu de CX, on aura

$$CX = 2.CF = 2.0I = 2.HO = 2.HX - 2.0X$$
$$= 2\frac{\overline{BX}^2}{AX} - AX = \overline{BX}^2 - 2 = 2 - \overline{AB}^2.$$

Dans son Traité anal. des sect. con. (Paris, 1707), le marquis de l'Hospital a donné une remarquable étude des sections angulaires. Il commence par une exposition très nette du théorème I de Viète, en discutant les divers cas qui peuvent se presenter, ainsi que les racines des équations correspondantes, et réduit les formules de Viète à la formule unique

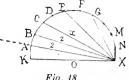
$$XX = x^{n} - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3}x^{n-6} + \dots$$

et en tire plusieurs théorèmes sur les sommes et les produits

des distances d'un point quelconque de la circonférence aux sommets

d'un polygone régulier inscrit.

Il recherche ensuite les équations déterminant l'inscription des polygones réguliers d'un nombre impair



de côtés. Soient les arcs égaux AK, AB, BC, CD, ... (fig. 18). On a

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CX}} = \frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{DX} + \mathrm{KX}}$$
 d'où $\mathrm{CX} = zx - x$.

De même $EX = z.CX - BX = z^2x - zx - x$.

En général, on a la formule

$$NX = xz^{n} - xz^{n-1} - (n-1)xz^{n-2} + \dots$$

Si on fait NX = o, on a l'équation cherchée, qui est donc $z^n - z^{n-1} - (n-1)z^{n-2} + \dots = 0.$

Par exemple, les équations

$$z - 1 = 0$$

$$z^{2} - z - 1 = 0$$

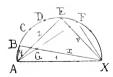
$$z^{3} - z^{2} - 2z + 1 = 0$$

$$z^{4} - z^{3} - 3z^{2} + 2z + 1 = 0$$

$$z^{5} - z^{4} - 4z^{3} + 3z^{2} + 3z - 1 = 0$$

- dont chacune s'obtient en multipliant le premier membre de la précédente par z et retranchant de la pénultième. servent à inscrire les polygones réguliers de 3, 5, 7, 9 et 11 côtés: les raciues représentant les cordes CX, EX, GX, ...

Il termine par le théorème suivant: Soient les arcs égaux AB, EF (fig 19). Appelons x, y, z, v les longueurs BX, AB, AE, EX. Les triangles ABG, AEX, XFG sont semblables, et on a



$$\frac{x}{z} = \frac{y}{BG}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{GX}{FX},$$

$$\frac{1}{v} = \frac{y}{AG}, \qquad \frac{1}{z} = \frac{GX}{GF},$$

d'où successivement

$$GX = x - \frac{yz}{v},$$
 $FX = vx - yz,$ $AF = xz + vy.$

Donc, si on forme les deux suites A, B, C, D, ... et a, b, c, d, \ldots telles qu'on ait

$$A = x,$$
 $a = y,$ $b = Ay + ax,$ $C = Bx - by,$ $c = By + bx,$ $d = Cy + cx,$

les expressions B, C, ... représenteront les cordes CX. DX, ... et b, c, ... les cordes CA, DA, ... et, de là, on tirera facilement les expressions générales, sous la forme d'une suite finie.

Enfin, nous terminerons par une remarque faite par Lagrange dans son *Calcul des fonctions*, où il récapitule les formules donnant les divers développements de $\cos nx$ et $\sin nx$ en rappelant que ces formules sont dues à Viète, à Newton et aux Bernoulli. Des relations

2
$$\cos z \cos mz = \cos (m + 1)z + \cos (m - 1)z$$
,
2 $\cos z \sin mz = \sin (m + 1)z + \sin (m - 1)z$,

on conclut que la suite des sinus et des cosinus d'arcs en progression arithmétique est une suite récurrente qui a l'échelle de relation $2\cos z$, -1, remarque déjà faite par Euler, et qu'on peut en tirer les développements connus et $\sin mx$ et $\cos mx$.

EXERCICES DIVERS

Par Aug. Boutin.

397. — On considère la suite récurrente :

$$u_1 = 1$$
, $u_2 = 3$, ... $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$. Vérifier les égalités:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.7} - \frac{1}{7.17} + \dots \pm \frac{1}{u_n.u_{n-1}} \mp \dots$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.17} + \frac{1}{17.99} + \dots + \frac{1}{u_{2n}u_{2n+2}} + \dots$$
(Cotto dominion and provide

(Cette dernière est rapidement convergente.)

398. — 1º On considère la suite récurrente:

 $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, \dots u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$: démontrer que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.17} + \frac{1}{17.29} + \dots + \frac{1}{u_{2n+1}(u_{2n} + u_{2n-1})} + \frac{1}{u_{2n+1}(u_{2n+1} + u_{2n+2})} + \dots$$

2º On considère la suite récurrente

 $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2a$, $u_3 = 4a^2 + 1$, ... $u_n = 2au_{n-1} + u_{n-2}$;

$$\frac{1}{a+1+\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{(u_0+u_1)(u_1+u_2)} - \frac{1}{(u_1+u_2)(u_2+u_3)} \\ + \frac{1}{(u_2+u_3)(u_3+u_4)} - \cdots \\ = \frac{1}{2a(a+1+\sqrt{a^2+1})} = \frac{1}{(u_0+u_1)(u_2+u_3)} + \frac{1}{(u_2+u_3)(u_4+u_5)} + \cdots \\ + \frac{1}{(u_{2n}+u_{2n+1})(u_{2n+2}+u_{2n+3})} + \cdots$$

- 399. Le produit de deux triangulaires consécutifs n'est jamais un carré.
- **400.** On peut toujours trouver une infinité de triangulaires dont le rapport soit p, quel que soit cet entier p, sauf s'il est un carré.

On a à résoudre l'équation

- x(x+1) = py(y+1). $2x = k-1, \quad 2y = z-1,$ elle devient $K^2 pz^2 = -(p-1)$ En posant

qui, par la méthode classique de Lagrange se ramène à

 $\alpha^2 - p\beta^2 = 1$ (3)en posant

i posant $k=\alpha \mp p\beta$ $z=\beta \mp \alpha$. Or, (3) a une infinité de solutions, quand p n'est pas un carré, il en est donc de même de (2), et les formules précédentes fournissent pour k et z, ainsi qu'il convient, une infinité de valeurs impaires, quand elles ne le sont pas toutes.

Si p est un carré m^2 , le problème, quand il est possible n'a plus qu'un nombre limité de solutions. Il n'y en a aucune pour m = 2.3.4.5.7.8.911.12.13.15.16.17 ...

Pour m=4k+2, l'équation $T'=m^2T$, T et T', triangulaires), admet au moins la solution:

$$T = \frac{k(k+1)}{2}$$
.

Donc: Quel que soit un triangulaire, on peut toujours le multiplier par un carré tellement choisi que le produit soit un triangulaire.

401. — Si un triangulaire est terminé par 3, le chiffre de ses dizaines est 0 ou 5, si un triangulaire est terminé par 8, le chiffre de ses dizaines est 2 ou 7.

BACCALAURÉATS

Académie de Paris (juillet 1895).

BACCALAURÉAT CLASSIQUE (LETTRES-MATHÉMATIQUES)

I. — Problème obligatoire:

1º Calculer les côtés b et c d'un triangle, connaissait son périmètre 2p, sa surface S, et sachant que l'angle A est de 60 degrés.

II. — Trois questions à choisir:

- 2º Longitude et latitude d'un lieu.3º Ascension droite et déclinaison d'un astre.
- 4º Mouvement apparent des planètes sur la sphère céleste.

I. - Problème obligatoire:

9° Étant donnée une progression géométrique de raison x, on considère trois termes consécutifs de cette progression. On fait d'abord leur somme; puis de cette somme on retranche le terme du milieu. Étudier la variation du rapport de la première expression à la seconde quand x varie.

II. — Trois questions à choisir :

10° Composition et décomposition des couples.

11° Centre de gravité de la pyramide.

12° Équilibre d'un corps placé sur un plan incliné.

Académie de Lyon.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

Questions au choix. — 1° (a) Volume du parallélépipède oblique.

(b) Volume du prisme triangulaire.

(c) Volume du tronc de prisme triangulaire.

 2° Problème. — Un prisme droit de hauteur donnée h a pour bases deux hexagones réguliers d'un même côté donué a. Après avoir pris sur la droite qui joint les centres des bases un point I à une distance b de l'une d'elles, on mêne par ce point un plan qui partage en deux troncs le prisme hexagonal. Exprimer les volumes de ces deux troncs qu'on décompose en prismes triangulaires ayant pour arête commune la droite des centres. On introduira dans le calcul toutes les longueurs auxiliaires qu'on jugera nécessaires et qu'on réduira le plus possible dans le résultat final.

BACCALAURÉAT COMPLET

1º Balance ordinaire. — Justesse. — Sensibilité. — Équation d'équilibre.

2º Trouver l'expression de la somme $1 + 2x + 3x^2 + \dots nx^{n-1} + (n+1)x^n$ pour n déterminé quelconque, mais entier.

Si l'on suppose x < 1, vers quelle limite tend cette somme quand n

croît indéfiniment?

Académie de Montpellier.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

Un triangle isoscèle ABC tourne autour de sa base BC. Déterminer la position d'une droite EF, de longueur donnée, dont les extrémités sont situées sur les côtés égaux AB, AC, sachant que la surface engendrée par ce segment est équivalente à celle d'un cercle donné. Entre quelles limites doit varier le rayon de ce cercle pour que le rayon soit possible.

1º Trouver les projections de l'intersection des deux plans. On supposera que le premier plan est donné par ses traces, tandis que le second est déterminé par la ligne de terre et un point dont on donne les projections.

2º ABCD étant un tétraèdre dont les quatre côtés sont égaux, trouver sur AB un point M tel que l'angle CMD ait une valeur donnée.

On considère, dans un plan vertical, deux segments de droites, AB, BC. Les points A et C sont à la même distance,

AH = CK = h

de l'horizontale HBK qui passe par le point B; ce point B est, de plus

supposé situé entre H et K.

Soient: t_i le temps qu'un point matériel pesant abandonné en A sur la droite AB mettrait à atteindre le point B; t_2 le temps qu'un point matériel pesant, abandonné en C sur la droite CB, mettrait à atteindre le point B, et enfin T le temps qu'un point matériel pesant, abandonné librement dans l'espace, mettrait à descendre d'une hauteur égale à AB + BC.

Cela étant, on demande de déterminer les inclinaisons des deux droites

AB et BC sur l'horizontale par les deux conditions:

1º Que la suite t_1 , T, t_2 forme une progression arithmétique;

2º Que la somme des volumes engendrés par les triangles AHB, BKC, en tournant respectivement autour de AB et de BC, soit égale à m fois le volume de la sphère de rayon h. — Discussion.

BACCALAURÉAT COMPLET

1º Résoudre l'équation:

 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$. (*)

2º Étant donnés deux cercles, dont l'un est intérieur à l'autre, déterniner un troisième cercle tangent à chacun des précédents et tel que les trois centres forment un triangle d'aire donnée. — Discussion.

On connaît l'hypoténuse a d'un triangle rectangle et la somme l des deux autres côtés et de la hauteur correspondant à l'hypoténuse. Colculer cette hauteur et les côtés du triangle. — Discuter le problème.

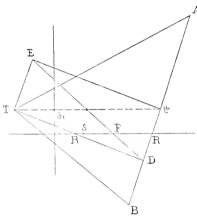
^(*) Il est utile d'observer que tg $60^{\circ} = \sqrt{3}$.

QUESTION 587

Solution par M. DAVIDOGLOU.

On considère une corde quelconque AB perpendiculaire à l'axe d'une parabole donnée P. Le cercle décrit sur AB comme diamètre enveloppe une parabole. Ce cercle rencontre la parabole P suivant une autre corde CD parallèle à AB: les deux cordes CD et AB sont toujours à une distance constante.

Soit S, F, O respectivement le sommet, le foyer de P et le centre de AB.



Projetons C en E sur SF. La relation $\overline{CE^2} = \overline{AO^2} - \overline{EO^2}$, combinée avec les relations connues: $\overline{AO^2} = 2p$. SO, $\overline{CE^2} = 2p$ (SO - OE), donne: 2pSO - $\overline{OE^2}$, d'où OE = 2p. On verrait de même que, si l'on projette D en E' sur SF, on aura OE' = 2p OE; E et E' se confondent; il suit de là que CD est

parallèle à AB et sa distance à cette dernière droite est constante.

Par le milieu μ de EO élevons μM perpendiculaire à SF et qui coupe le cercle O en M.

La relation $\overline{M\mu^2} = \overline{AO^2} - p^2 = 2p \left(SO - \frac{p}{2}\right) = 2p \cdot D\mu$ montre que le cercle O enveloppe une parabole ayant S comme foyer, la directrice de P pour tangente au sommet.

Nota. — M^{me} V^{re} F. P_{RIME} nous a adressé une solution analytique de cette question.

M. Droz-Farny observe que la question peut être généralisée :

Soit une corde AB quelconque de la parabole qui rencontre l'axe en a. Le cercle décrit sur AB comme diamètre rencontre la parabole

suivant une sécante CD qui coupe l'axe en β; la distance αβ est

toujours égale à 2p.

Ce théorème se laisse démontrer très élémentairement; il donne lieu à de nombreuses conséquences. Il a été d'ailleurs énoncé dans la N. C. M. (1877, 32 et 319) par Catalan.

QUESTION 588

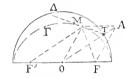
Solution, par M. Jean Négrétzu.

On considère une demi-ellipse Γ et le demi-ecrele principal correspondant Δ . Soient: M, un point de Γ ; Θ , le centre de Γ ; F, l'un des foyers. On trace MA équipollent à ΘF .

Démontrer que OA rencontre Δ en un point qui appartient à la tangente en M. (G. L.)

Soient O le centre de l'ellipse, F' l'autre foyer. Le qua-

drilatère OMAF est un parallélogramme. Il en est de même de F'MAO, puisque F'O = FO = MA. Donc, la droite OA est parallèle à F'M. Or, on sait que la parallèle,



menée par le centre de l'ellipse, au rayon vecteur qui joint le point de contact d'une tangente à l'ellipse, rencontre le cercle principal en un point qui appartient à la tangente; donc...

Nota. — Solutions analogues de MM. Droz-Farny; E.-N. Barisien; G. Tzitzétca; Davidoglou, élève au lycée de Berlad et A. Champion.

Nous avons aussi reçu une solution analytique de M. Vazou, au collège de Falaise.

QUESTION 590

Solution par A. Droz-Farny.

On considère un cercle Δ , un diamètre AB de ce cercle et une corde CD perpendiculaire à AB. Au-dessus de AB, on décrit un cercle Δ' , tangent à AB et à CD, touchant Δ intérieurement; puis un cercle Δ'' , tangent à AB et à CD, touchant Δ extérieurement. Ces deux cercles Δ' , Δ'' sont tangents à CD, de part et d'autre de cette droite.

 Δ' a pour centre ω , il touche AB en H et CD en H'; Δ'' a pour centre ω' , il touche AB en K et CD en K'. Cela posé:

1º Les droites CH et CK sont rectangulaires;

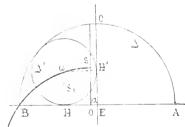
2º Les points H' et K' forment avec les points C et D une division harmonique;

3° La droite ωω' passe par une des extrémités du diamètre AB. (E.-N. Barisien.)

Soient O le centre du cercle Δ , R son rayon et E le point d'intersection de la corde CD avec AB, enfin ρ' et ρ'' les rayons des circonférences Δ' et Δ'' , et a la distance OE.

On démontre aisément que les centres des circonférences tangentes à AB et au cercle Δ soit intérieurement, soit extérieurement, sont sur deux paraboles de même axe, le diamètre de Δ perpendiculaire à AB. admettant O comme foyers et R pour paramètre.

Les coordonnées du point ω ayant respectivement pour valeurs



$$H0 = \rho_1 - a \text{ et } \frac{R}{2} - \rho_1,$$

on a la relation:

$$(\rho_1 - a)^2 = 2R\left(\frac{R}{2} - \rho_1\right),$$

d'où, finalement:

$$\rho_1 = \sqrt{2R(R-a)} - (R-a).$$
De la même manière.

on tronversit pour le centre ω' la relation

$$\overline{KO}^2 = 2 R \left(\frac{R}{2} + \beta_2 \right)$$
$$(\beta_2 + a)^2 = 2 R \left(\frac{R}{2} + \beta_2 \right)$$

d'où

$$\varepsilon_2 = \sqrt{2R(R-a)} + (R-a).$$

De ces valeurs, on déduit d'abord :

$$\rho_1 \rho_2 = 2R^2 - 2aR - (R - a)^2 = R^2 - a^2 = (R + a)(R - a),$$
donc
$$EH.EK = EB.EA = \overline{EC}^2;$$

l'angle HCK est donc droit.

Comme
$$EH = EH'$$
 et $EK = EK'$ on a aussi:
 $EH', EK' = \overline{EC}^2 = \overline{ED}^2$.

done

$$(CDH'K') = - 1.$$

Enfin

$$\begin{split} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{\sqrt{2\mathrm{R}(\mathrm{R}-a)} + (\mathrm{R}-a)}{\sqrt{2\mathrm{R}(\mathrm{R}-a)} - (\mathrm{R}-a)} = \frac{\mathrm{R}+a+2\rho_2}{\mathrm{R}+a} = \frac{\mathrm{R}+a+\rho_2}{\mathrm{R}+a-\rho_1},\\ \mathrm{ou} &\qquad \qquad \frac{\omega'\mathrm{K}}{\omega\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{B}\;\mathrm{K}}{\mathrm{B}\;\mathrm{H}}. \end{split}$$

Les points B, ω , ω' sont donc en ligne droite.

Nota. — Nous avons reçu d'autres solutions de M. Davidoglou, élève au lycée Codreano à Berlad et de M. A. Champion et une solution analytique de M. Vazou, professeur au collège de Falaise.

QUESTION 593

On considére trois points en ligne droite A, B, C (C étant situé entre A et B) et on décrit les cercles ayant pour diamètres respectifs AB, CA et CB. Le cercle tangent à la fois à ces trois cercles touche le cercle CA en M et le cercle CB en N. Les quatre points M, N, A et B sont sur un même cercle. (E.-N. Barisien.)

La propriété énoncée sera établie si l'on prouve que

$$\widehat{\text{BAM}} = 180^{\circ} - \widehat{\text{BNM}}.$$

On a, en effet:

(2)
$$\widehat{BAM} = \frac{\widehat{O''O'\omega}}{\frac{2}{2}}$$
 et
$$\widehat{BNM} = \widehat{BNO''} + \widehat{MNO'} = \frac{\widehat{O'\widehat{O'\omega}}}{\frac{2}{2}} + 180^{\circ} - \widehat{MN\omega}$$

ou

(3)
$$\begin{cases} \widehat{\text{BNM}} = \frac{\widehat{\text{O'O''}\omega}}{2} + 180^{\circ} - \left(90^{\circ} - \frac{\widehat{\text{O'}\omega\text{O''}}}{2}\right) \\ = \frac{\widehat{\text{O'O''}\omega} + \widehat{\text{O'}\omega\text{O''}} + 180^{\circ}}{2}. \end{cases}$$

En ajoutant (2) et (3), et en observant que la somme des

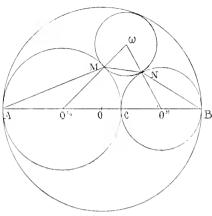


Fig. 593.

angles du triangle O'O"ω est égale 180°, on a la relation (1). On voit que, dans cette démonstration, on ne fait pas entrer la condition de contact entre la circonférence ω et la circonférence décrite sur AB comme diamètre. La proposition énoncée peut donc être formulée de la manière suivante:

Étant données deux cir-

conférences se touchant en C, les points de contact d'une circonférence qui les touche l'une et l'autre et les extrémités des diamètres qui passent par C sont quatre points concycliques.

Nota. — Nous avons reçu diverses solutions de cette question de: MM. Davidoglou, élève au lyeée Codréano, à Berlad; E. Leroy, commis des Ponts et Chaussées et A. Champion.

MM. G. Tzitzeica et César Spino démontrent la proposition en formant la figure inverse; le premier, en prenant le point A pour pôle d'inversion, l'autre, en le mettant en C.

M. César Spino, après avoir reconnu que la proposition est susceptible d'extension, observe que l'on peut supposer le rayon de ω infiniment grand : on arrive ainsi à la remarque suivante : Lorsque deux circonférences se touchent en C, les points de contact de la tangente commane et les extrémités du diamètre qui correspondent au point C sont concycliques. On sait que cette propriété est le cas particulier d'une propriété plus générale relative à deux circonférences que leonques. Si, par le centre de similitude de deux circonférences, on mène deux transversales, les points de rencontre, convenablement choisis, sont, quatre à quatre, concycliques.

QUESTION 595

Solution, par M. A. DROZ-FARNY.

La droite qui joint l'orthocentre d'un triangle à son centre de gravité ne peut passer par un des sommets du triangle que si le triangle est rectangle ou isoscèle. (E.-N. Barisien.)

La droite d'Euler du triangle passe aussi par le centre du cercle circonscrit O. Exprimons la surface du triangle HOA en fonction des éléments du triangle donné. On a :

$$HA = 2R \cos A$$
; $OA = R$; angle $HAO = B - C$

$$\Delta HOA = \frac{1}{2}.HA.OA. \sin HAO = R^2 \cos A.\sin (B - C).$$

Si la droite d'Euler passe par le sommet du triangle Λ , la surface HOA sera nulle, ce qui peut avoir lieu pour

$$\cos A = 0$$
, ou $A = 90^{\circ}$, $a(B - C) = 0$, ou $B = C$

et $\sin(B-C) = 0$, ou B=C.

Autrement (*). — Soient G le centre de gravité, et H l'orthocentre d'un triangle ABC.

1º Si l'un des deux points considérés se confond avec un sommet du triangle, la droite GH remplira la condition énoncée.

Si le point G était sommet du triangle, ce triangle se réduirait à un point.

Le point H ne peut être sommet du triangle ABC que si ce triangle est *rectangle*; l'orthocentre se confond alors avec le sommet de l'angle droit.

2º Les deux points G et H étant à l'intérieur du triangle, si la droite GH passe par le sommet B, par exemple, la ligne BGH est alors à la fois médiane et hauteur dans le triangle ABC et ce triangle est alors nécessairement isoscèle.

L'énoucé du problème se trouve ainsi complètement justifié.

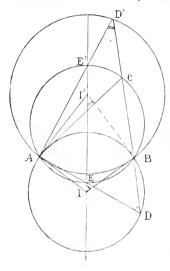
Nota. — M. Négretzu, de Bucarest, nous a envoyé aussi une solution analytique.

^(*) Cette solution est de M. Leroy, commis des Ponts et Chaussées.

QUESTION 598

Solution par M. VAZOU.

La médiatrice du côté AB du triangle ABC rencontre la circonférence ABC en E, E' et les droites AE, AE' rencontrent



BC en D et D'. Démontrer que la circonférence BED passe par le centre de la circonférence BAD, et, de même, la circonférence BE'D' par le centre de la circonférence BAD'. (Bernès.)

Soit I le centre de la circonférence BAD; l'angle au centre AIB est le double de l'angle inscrit ADB, par suite, EIB = ADB, ce qui montre que les quatre points E, B, D, L sont concycliques.

De même I' désignant le centre de la circonférence ABD', on a $\widehat{AIB} = 2.\widehat{AD'B}$, d'où $\widehat{EIB} = \widehat{AD'B}$, etc...

Nota. — Solutions analogues par MM. Droz-Farny A. Champion et Jean Négretzu, à Bucarest.

QUESTION 602

Solution par M. A. Droz-Farny.

L'expression $3600^n - 1600^n - 189^n + 84^n$ est divisible par 1895. (Davidoglou.)

Cette expression s'écrit, successivement:

$$400^{n} \cdot 9^{n} - 400^{n} \cdot 4^{n} - 21^{n} \cdot 9^{n} + 21^{n} \cdot 4^{n},$$

$$400^{n} (9^{n} - 4^{n}) - 21^{n} (9^{n} - 4^{n}),$$
et, enfin
$$(9^{n} - 4^{n}) (400^{n} - 21^{n}).$$

Le premier facteur étant divisible par 9-4=5 et le second par 400-21=379, l'expression est divisible par 5.379=1895.

Nota. — Solutions diverses par MM. Alfred Champion; Dhavernas, élève au lycée Michelet; Jean Négretzu, à Bucarest; Leconte, élève au collège Chaptal.

QUESTION 603

Solution par M. Angel Bozal-Obelero, professeur à l'Institut libre de Santona (Espagle).

Les deux relations

$$\begin{split} \frac{a_1}{1+b_1} + \frac{a_2}{1+b_2} + \ldots + \frac{a_n}{1+b_n} &= \frac{A}{1+B}, \\ \frac{a_1(B-b_1)}{1+b_1} + \frac{a_2(B-b_2)}{1+b_2} + \ldots + \frac{a_n(B-b_n)}{1+b_n} &= 0, \end{split}$$

entrainent la suivante

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = A$$
. (Vautré.)

Si l'on pose pour abréger

$$\frac{a_1}{1+b_1} = K_1, \quad \frac{a_2}{1+b_2} = K_2, \quad \dots \frac{a_n}{1+b_n} = K_n,$$

les deux relations deviennent

$$K_1(t + B) + K_2(t + B) + ... + K_n(t + B) = A$$

 $K_1(B - b_1) + K_2(B - b_2) + ... + K_n(B - b_n) = o$,
d'où, en retranchant

$$K_1(1 + b_1) + K_2(1 + b_2) + \ldots + K_n(1 + b_n) = A$$
. Or, on a

$$K_1(\tau + b_1) = a_1$$
 $K_2(\tau + b_2) = a_2$, ... $K_n(\tau + b_n) = a_n$, et, par conséquent,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \Lambda$$
.

Nota. — Solutions analogues par MM. Alfred Champion; Jean Négretzu; Dhavernas, élève au lycée Michelet; Droz-Farny.

QUESTIONS PROPOSÉES

- 656. M est un point arbitraire du plan du triangle ABC; on construit l'angle $\widehat{MBX} = \widehat{MAC}$ (grandeur et signe) et l'angle $\widehat{MCY} = \widehat{MAB}$. M'étant l'intersection de BX et CY, montrer que si M parcourt une droite ou un cercle, M' parcourt généralement un cercle. Plus généralement, M décrivant un certain lieu, quel est le lieu décrit par M'? Faire voir que le triangle M'BC est directement semblable au triangle podaire du point M relativement à ABC. (Bernés.)
- 657. Le point M où se coupent les deux droites symétriques de BC, l'une relativement à la hauteur BK du triangle ABC et l'autre relativement à la hauteur CL, et les points N et P où ces mêmes hauteurs rencontrent respectivement la parallèle menée par C à AB et la parallèle menée par B à AC, sont trois points en ligne droite. De plus, si Q est la rencontre de cette droite MNP et de la médiatrice de BC, les deux angles QBC, QCB sont égaux à l'angle A du triangle ABC.
- 658. Par le sommet de l'angle A du triangle $\mathbb{A}BC$ on mène deux isogonales quelconques $\mathbb{A}x$, $\mathbb{A}y$, et, par le milieu D de BC, on trace, entre ces deux droites, le segment MN partagé en D en deux parties égales. Les droites BN, CN rencontrant AM en β , γ , démontrer que les tangentes en B et C aux circonférences $\mathbb{A}B\beta$, $\mathbb{A}C\gamma$ se rencontrent sur $\mathbb{A}N$.

659. — Dans un triangle ABC on considère les centres O_B et O_C des cercles exinscrits dans les angles B et C et on projette ces centres en O_B' et O_C' sur le côté BC. La droite O_CO_B rencontre BC en A'. Montrer que:

1º Les points A et A' sont conjugués harmoniques des points O_c et O_B ;

2º L'ellipse ayant pour sommet du grand axe les points O'_c et O'_E et passant par A jouit de la propriété d'être tangente à la droite O_cO_E et d'avoir pour foyers les points B et C.

(E.-N. Barisien.)

- 660. Soient O le centre d'inversion, A et B deux points d'une figure, A' et B' les points correspondants de la figure inverse. Démontrer que la médiane et la symédiane du triangle AOB, issues de O, sont respectivement symédiane et médiane du triangle A'OB'. (A. Cazamian.)
- 631. Étant donné un triangle ABC: 1° Si sur AB à partir de B on porte dans les deux sens une même longueur arbitraire l en BD, BD', les tangentes en B aux deux cercles BCD, BCD' sont conjuguées harmoniques relativement à BA, BC; 2° Si l'on porte dans un même sens deux longueurs BD, BD₁, ayant a pour moyeune proportionnelle les tangentes en B aux deux cercles BCD, BCD₁ sont isogonales relativement à l'angle B. Cas particulier où BD = c.
- **662.** Dans un triangle ABC, on prolonge AB de BD égal à $\frac{b^2}{c}$ et AC de CE égal à $\frac{c^2}{b}$. Montrer que les quatre points B, C, D, E sont sur une même circonférence et que les tangentes en B et C à cette circonférence passent, l'une par un des points de Brocard, l'autre par l'autre.
- Nota. L'angle CDB est égal à l'angle de Brocard. On peut construire ainsi cet angle avec une simplicité géométrographique égale à 14. (Bernès.)
- 663. Dans un triangle ABC, le pied de la hauteur abaissée de A étant A', et P, Q désignant les projections de B, C sur le rayon AO du cercle ABC, le cercle A'PQ a pour centre le milieu de BC.

 (Bernès.)
- 664. Par le sommet A du triangle ABC, on trace une droite quelconque X sur laquelle on projette B et C en P et Q; et E étant la rencontre de cette droite avec la médiatrice de BC, on porte sur X Ez = EB et on projette α en A' sur BC. Le cercle A'PQ a son centre au milieu de BC.

Plus généralement, si X, E et α étant définis de mème, A' est un point arbitraire de BC et P et Q, les rencontres de X avec les deux parallèles menées par B et C dans la direction définie par $(BP, X) = (BC, \alpha A')$ où les angles sont pris

en grandeur et signe à K_{π} près, le cercle A'PQ aura son centre à la rencontre de BC et d'une parallèle à $\alpha \Lambda'$ menée par E. (Bernès.)

- **665.** Dans un quadrilatère plan quelconque, convexe ou non, on donne AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, et le produit $AC \times BD = m^2$, construire le quadrilatère. On montrera que les conditions de possibilité sont que la plus grande des longueurs a, b, c, d soit moindre que la somme des trois autres et que m^2 soit compris entre ac + bd et la plus grande des deux quantités $\frac{1}{2}(a^2 + c^2 b^2 d^2)$, ac bd prises en valeur absolue. Quelle est la forme du quadrilatère pour les valeurs-limites de m^2 ? (Bernés.)
- **666.** Construire un quadrilatère dont on donne a, b, c, d définis comme dans la question précédente et la différence θ entre les deux angles, définis en grandeur et signe à $2K\pi$ près, sous lesquels de A et C on voit BD. On montrera que lorsque ac bd a une plus grande valeur absolue que $\frac{1}{2}(a^2 + c^2 b^2 d^2)$, θ peut prendre toutes les valeurs entre $\theta + \pi = \theta + \pi$, et on déterminera les limites de θ dans le cas contraire. On doit aussi trouver, comme condition de possibilité, que la plus grande des quantités θ , θ , θ , θ est moindre que la somme des trois autres. (Bernès.)
- **667.** a, b, c, d, b ayant la même signification que dans la question précédente, montrer que AC et BD sont donnés par les relations

$$\begin{array}{l} {\rm AC.BD} = \sqrt{a^{2}c^{2} + b^{2}d^{2} - 2abcd\cos\theta}, \\ [a^{2}b^{2} + c^{2}d^{2} - 2abcd\cos\theta] \overline{\rm AC}^{2} + [a^{2}d^{2} + b^{2}c^{2} - 2abcd\cos\theta] {\rm BD}^{2} \\ &\qquad \qquad = 2[\Sigma a^{2}b^{2}c^{2} - abcd.\Sigma a^{2}.\cos\theta]; \end{array}$$

qui donnent

 $\begin{array}{l} [a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\cos\theta]\overline{\rm AC}^4 - 2[\Sigma a^2b^2c^2 - abcd,\Sigma a^2,\cos\theta]\rm AC^2 \\ + [a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos\theta][a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\theta] = 0, \\ {\rm avec\ u::} 2\ {\rm \'equation\ analogue\ pour\ BD}. \end{array}$

Le Directeur-gérant, G. de LONCHAMPS.

NOTES SUR LE PENTAGONE RÉGULIER

Par M. A. Droz-Farny.

1. — Le journal de Mathématiques élémentaires, année 1893, page 17, a donné une construction très simple du pentagone régulier inscrit dans une circonférence.

Qu'il me soit permis d'indiquer la construction, très simple aussi, du pentagone régulier dont on connaît la longueur du côté.

Représentons par a le côté du pentagone ABCDE et par x la longueur d'une de ses diagonales; en appliquant au quadrilatère inscriptible BCDE, le théorème de Ptolémée, on obtient immédiatement la relation:

 $x^{2} - ax - a^{2} = 0,$ $x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^{2} + \frac{a^{2}}{4}}.$

d'où

Sur une droite indéfinie, portons DC = a et soit O le point milieu de DC. De D et C comme centres, avec a comme rayon, décrivons les circonférences (D) et (C). La per-

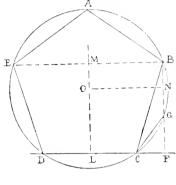
pendiculaire DF élevée, en D, sur DC, coupe (D) en F; on aura évidemment

OF =
$$\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$
.
Décrivons de O
comme centre,
avec OF comme

rayon, une circonférence coupant DC en M et M'. Les circonférences décrites de C et de D comme centres avec CM = DM' = x comme rayons se coupent en A et rencontrent (D) et (C) respectivement en E et B.

ABCDE sera le pentagone cherché.

2. — Du sommet B d'un pentagone régulier, inscrit dans une circonférence, abaissons la perpendiculaire BF sur le côté DC. Cette perpendiculaire rencontre en G la circonférence circonscrite. Comme l'angle BCF = 72° on a : angle



 $\overline{CBG} = 18^{\circ}$ et par conséquent le point G est le milieu de l'arc BC; donc BG et GC sont deux côtés consécutifs du décagone régulier inscrit. D'après un théorème connu, on a: $\overline{BC^2} - \overline{CG^2} = R^2.$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{BF^{2} - \overline{GF}^{2} = \overline{BC}^{2} - \overline{GC}^{2} = R^{2},}$$

$$(BG + 2GF) = \frac{R^{2}}{\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{R(\sqrt{5} + 1)}{2},$$

$$2GF = \frac{R}{2}[\sqrt{5} + 1] - \frac{R}{2}[\sqrt{5} - 1] = R$$

d'où

donc

Comme dans la figure MO = BN et OL = NG + GF, il en résulte immédiatement les deux théorèmes :

 $GF = \frac{R}{2}$.

- I. L'apothème du pentagone étoilé régulier est égal au demicôté du décagone régulier inscrit dans la même circonférence.
- II. L'apothème du pentagone régulier est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit augmenté de la moitié du côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle. [Question 623, proposée par M. Mannheim (*).]

^(*) Deux solutions de cette question paraîtront dans le numéro prochain.

DÉTERMINATION DU CENTRE DE SIMILITUDE

DE DEUX FIGURES DIRECTEMENT SEMBLABLES ABC, A'B'C'

Soient AB, A'B' deux côtés homologues donnant lieu à un quadrilatère convexe (seul cas que nous voulions examiner).

1er moyen. — Déterminons le point de Miquel du quadrilatère convexe ABB'A', par exemple, en décrivant les cercles circonscrits AA'D' et BB'D'. Le point S est le point double demandé, car les triangles ASB, A'SB' sont directement semblables.

Les cercles DAB, DA'B' donneraient le même point S. Ces quatre cercles peuvent être nommés cercles de Miquel du quadrilatère.

2º moyen. — Déterminons les points conjugués Met M' tels qu'on ait :

 $\frac{MA}{MA'} = \frac{M'A}{M'A'} = \frac{A\,B}{A'B'} \cdot \label{eq:mass}$

Le cercle dont MM' est le diamètre est le lieu des points dont les distances aux points fixes A et A' égale le rapport des côtés homologues AB, A'B'; donc, ce cercle passe par le point S; il en est de même pour le cercle analogue, ayant NN' pour diamètre; ainsi le point double S peut être obtenu par l'intersection des cercles MM' et NN'.

Ce moyen donne aussi le centre S' pour deux figures inversement semblables ABC, A'B'C".

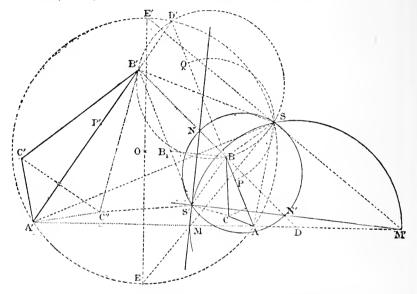
Les cercles analogues PQ, P'Q' passent aussi par S.

Les quatre cercles ci-dessus peuvent être nommés cercles d'Apollonius du quadrilatère ABB'A'.

3º moyen. — On peut tracer la droite qui est le lieu des distances proportionnelles aux segments AB' et A'B', ainsi que la droite lieu des points des divisions proportionnelles de ces mêmes segments (les projections de chaque point de cette dernière ligne divisent les segments en parties directement proportionnelles). Chacun de ces lieux passe par S; il en est

de même des lieux analogues pour AA' et BB'. Voilà donc quatre droites, faciles à tracer, qui passent par le point double S.

4º moyen. — En supposant connu le point demandé, on remarque que le point S est sur la bissectrice EMS de l'angle ASA'; de là, la construction suivante: on décrit le cercle AD'A',



on divise AA' en parties proportionnelles aux côtés AB, A'B', et l'on joint le point milieu E de l'arc AEA' au point M, afin d'obtenir S.

Ce moyen a été indiqué par M. Tarry. (Mathesis, 1895, pp. 79 et 83.)

La bissectrice extérieure passe aussi par S; pour chaque cercle de Miquel, on a deux bissectrices, donc en tout huit bissectrices.

Ainsi huit cercles et douze droites, faciles à déterminer, passent par le point double de deux figures directement semblables.

Remarque. — 1º On peut demander le nombre de constructions distinctes. Deux lignes, droite ou cercle, suffisent pour déterminer S; mais le tracé de la bissectrice EMS, par exemple,

comporte le tracé du cercle AE'A', il n'y a donc pas lieu de tenir compte de l'intersection de EMS et de l'un quelconque des sept autres cercles, car on aurait construit, en réalité, deux cercles et une droite: ainsi les bissectrices ne dennent que huit constructions distinctes.

Quant aux huit cercles et aux quatre autres droites, ils donnent lieu à 66 constructions, donc on peut obtenir le point S par 74 tracés graphiques différents.

2º Pour deux triangles ABC, A'B'C', en prenant chaque groupe de côtés homologues, on aurait:

9 cercles d'Apollonius, 9 cercles de Miquel et 12 lieux rectilignes (non compris 18 bissectrices); en tout:

$$\frac{30 \times 29}{2} + 18 = 453$$

tracés différents, pour obtenir le centre S de similitude.

3º Figures inversement semblables ABC, A'B'C".

Les cercles MM' et NN' donnent le centre S' de similitude inverse.

L'axe de symétrie et la bissectrice des angles tels que BS'B', AS'A' etc.; cet axe est donc facile à déterminer, lorsqu'on connaît S'.

On peut aussi déterminer d'abord l'axe et l'utiliser pour trouver S': il suffit de chercher les points M, N qui divisent AA' ou BB' en parties proportionelles aux côtés homologues AB, A'B'; puis on détermine le point B₁, symétrique de B et l'on mène B'B₁S'. Le centre S' est aussi donné par MN et M'N', de même que par le lieu des distances et des divisions proportionnelles.

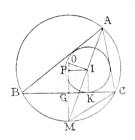
4º Figures égales. On peut employer la construction de Chasles, ou les précédentes, convenablement simplifiées; ainsi, pour deux figures directement égales, le tracé des bissectrices intérieures, et celui des cercles ayant pour diamètres MN' et NN' reviennent à la construction de Chasles, car on obtient les perpendiculaires élevées au milieu de AA' et de BB'.

DÉMONSTRATION D'UNE RELATION CONNUE

Par un Anonyme.

Soient ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit et I le centre du cercle inscrit à ce triangle. La bissectrice de l'angle en A coupe, en M, le cercle circonscrit; la projection du centre I sur le rayon OM est P; OM rencontre BC en G.

Dans le triangle OMI, on a



(1) $\overrightarrow{OI}^2 = \overrightarrow{OM}^2 + \overrightarrow{MI}^2 - 2OM$, PM. Mais $\overrightarrow{MI}^2 = \overrightarrow{MC}^2 = 2.0M \times MG$. $2OM \cdot PM = 2OM \times MG + 2OM \times PG$, donc $\overrightarrow{MI}^2 - 2OM \times PM = -2OM \times PG$.

Portant cette valeur dans la relation (4) il vient:

 $\overline{\mathrm{OI}}^2 = \overline{\mathrm{OM}}^2 - 2.0\mathrm{M} \times \mathrm{PG}.$

Le segment OI est la distance des centres O et I, OM est le rayon du

cercle circonscrit au triangle donné et PG = IK est égal au rayon du cercle inscrit à ce même triangle. On a donc ainsi établi la relation connue qui existe entre ces trois éléments.

EXERCICES DIVERS

Par M. Aug. Boutin.

402. — D'un point M de la circonférence circonscrite à un triangle ABC, on abaisse les perpendiculaires MA', MB', MC' sur les côtés, puis l'on porte, sur ces perpendiculaires, dans le sens positif, à partir de leur pied, les longueurs: A'A" = 2R cos A, B'B" = 2R cos B, C'C" = 2R cos C. Les trois points A", B", C", sont situés sur une même ligne droite, perpendiculaire à la droite de Simson, correspondant au point M.

A''B''C'' est la droite de Simson de M, dans un triangle symétrique de ABC, par rapport à O

403. — D'un point M du plan d'un triangle ABC, on abaisse sur les trois côtés, les perpendiculaires MA', MB', MC', et sur ces perpendiculaires, dans un même sens, on porte les longueurs : $A'A'' = kR \cos A$, $B'B'' = kR \cos B$, $C'C'' = kR \cos C$. Les points A", B", C", sont en ligne droite pour deux valeurs de k données par l'équation:

 $k^2 - 2k + \frac{4S'}{S} = 0.$

(S' étant l'aire du triangle podaire de M.)

Ces valeurs de k sont les mêmes, quand M décrit une circonférence concentrique à celle qui est circonscrite à ABC.

Ces deux propositions sont susceptibles de la généralisation remar-

quable, visée dans la proposition suivante:

404. — D'un point M du plan d'un triangle, on abaisse les perpendiculaires MA', MB', MC', sur les côtés de ce triangle, ct sur ces projetantes, on porte, dans un même sens, c'est-à-dire vers l'intérieur, ou vers l'extérieur, des longueurs : $A'A_1 = kx_1$ $B'B_1 = ky_1$, $C'C_1 = kz_1$ (x_1, y_1, z_1 , étant les coordonnées normales d'un point M, du plan du triangle); déterminer k de manière que les trois points A1, B1, C1, soient en ligne droite.

L'équation qui détermine k est

 $\frac{2k^2S_{M_1}-k\Sigma x(y_1\sin C+z_1\sin B)+2S_{M}=o;}{x,y,z \text{ sont les coordonnées normales de M, S}_{M},S_{M_1},\text{ les aires des}$ triangles podaires de M et M.

On voit qu'il y a, en général, deux valeurs de k qui répondent à la

question; ces valeurs déterminent deux droites A, A'.

On pourra, à ce sujet, démontrer les propositions suivantes:

Δ et Δ' sont parallèles aux droites de Simson des points où MM, rencontre la circonférence circonscrite à ABC; c'est-à-dire que Δ et Δ' sont parallèles aux asymptotes de la conique, transformée par points inverses de MM,.

Pour que Δ et Δ' soient perpendiculaires, il faut et il suffit que la droite MM.

passe par O.

 Δ et Δ' sont des droites de Simson de M par rapport aux triangles homothétiques de ABC, M, étant centre d'homothétie, et le rapport d'homothétie

étant tel que M soit un point de la circonférence circonscrite.

On peut obtenir un grand nombre de cas particuliers remarquables, en choisissant pour M et M, des points remarquables. En particulier, nous signatons le cas où M ou M, appartiennent à la circonférence circonscrite a ABC.

Le cas suivant paraît seul avoir été remarqué jusqu'ici: M est le point O, et M, le point K; Δ et Δ' sont des droites perpendiculaires entre elles et parallèles aux asymptotes de l'hyperbole de Kiepert (axes de l'ellipse de Steiner); les valeurs de k correspondantes sont celles qui répondent aux angles de Kiepert.

BACCALAURÉATS

Académie de Nancy.

BACCALAURÉAT COMPLET

1º Inscrire un hexagone régulier et un décagone régulier dans un cercle.

 2° Calculer les rayons des deux bases d'un tronc de cône sachant que la somme de leurs earrés est a^2 et que le volume du tronc est égal à celui d'un cône ayant même hauteur et un rayon de base égal à R,

BACCALAURÉAT CLASSIOUE

1° Questions au choix. — (a) Pour diviser un nombre entier par le produit effectué de plusieurs autres, on peut diviser successivement par chacun d'eux. Démontrer ce théorème dans le cas où les divisions ne se font pas exactement.

(b) Démontrer directement, sans recourir à la décomposition en facteurs premiers, que le plus petit commun multiple de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres divisé par leur plus grand commun

diviseur. - Trouver le plus petit multiple de trois nombres.

(c) Démontrer que lorsqu'un nombre divise un produit de deux facteurs, s'il est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre, et que lorsqu'un nombre premier divise un produit de plusieurs facteurs, il divise au moins l'un d'eux.

 2° Problème. — On donne une circonférence de rayon R et un point A extérieur, à la distance OA = a du centre O. De ce point, on mène la sécante ADE faisant l'angle α avec le diamètre ABC. Calculer l'aire du triangle DOE, le rayon de la eirconférence circonscrite à ce triangle et le volume qu'il engendre en tournant autour du diamètre BC.

Académie de Poitiers.

Questions au choix. — (a) Volume du tronc de pyramide à bases parallèles.

Cas des bases triangulaires. Cas des bases quelconques.

(b) Volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan, passant par un sommet et ne coupant pas la surface. Application au volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un de ses diamètres.

(c) Volume du segment sphérique. — Segment à deux bases. — Seg-

ment à une base.

Problème. — Mener une corde DE perpendiculaire au diamètre AB de manière que la somme 2AC + DE soit égale à une longueur donnée 2a. — Traiter la question par l'algèbre et discuter.

OUESTION 283

Solution et développements par M. Sollertinsky.

Nous allons démontrer que :

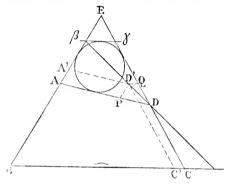
Le périmètre et les angles d'un quadrilatère étant donnés, si l'un

des angles reste fixe, le sommet de l'angle opposé décrit une droite (à construire).

L'aire du quadrilatère alteint son maximum, quand celui-ci est circonscriptible (*).

Soit E l'intersection de AB, CD; βγ la tangente au cercle inscrità EAD menée parallèlement à BC:

effet,



: D3 est la droite cherchée. On a, en

$$BA' + A'D' + D'C' + C'B$$

$$= (\mathrm{BA} + \mathrm{D'P}) + (\mathrm{AD} - \mathrm{PD}) + (\mathrm{DC} + \mathrm{QD}) + (\mathrm{CB} - \mathrm{D'Q}).$$

Mais, les quadrilatères D'PDQ, β AD γ étant homothétiques, on a D'P + QD = PD + D'Q

Donc BA' + A'D' + D'C' + C'B = BA + AD + DC + CB. L'aire considérée atteint son maximum, lorsque A'C' devient parallèle à $D\beta$; mais alors le quadrilatère correspondant est circonscriptible.

QUESTION 389 Solution par M. H. Brocard.

Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{q} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{p}.$$
 (Humbert.)

^(*) C'est une solution de la question 283 (J. E. 1888, p. 144). Parmi tous les quadrilatères convexes, dont le périmètre et les angles sont donnés, quel est le plus grand en surface? (Catalan.)

Soit $u = \lg a$. On aura

$$\operatorname{tg} 4a = \frac{4u(1-u^2)}{u^4-6u^2+1}.$$

donc

$$1 = \frac{\frac{4(q^2 - 1)q}{q^4 - 6q^2 + 1} - \frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p} \cdot \frac{4(q^2 - 1)q}{q^4 - 6q^2 + 1}}.$$

On en déduit

$$p = \frac{q^4 - 6q^2 + 1 + 44^3 - 4q}{4q^3 - 4q - q^4 + 6q^2 - 1}.$$

Il faudrait donc substituer les valeurs $1, 2, 3, \ldots$ et voir celles qui donnent pour p des valeurs entières.

La solution $q=\pm 1$, p=1 est immédiate, mais elle est à rejeter. On trouve ensuite p=239 pour q=5. On en conclut la formule de Machin:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc tg} \frac{1}{239}.$$

J'ai cherché les substitutions numériques donnant aussi pour p des valeurs entières. J'ignore s'il en existe, n'ayant pas réussi à en obtenir d'autres que celles qui ont été mentionnées ci-dessus.

QUESTION 568 (*)

Résoudre l'équation

$$2 (X + \alpha - \beta - \gamma) (X + \beta - \gamma - \alpha) (X + \gamma - \alpha - \beta) + (X + \alpha - \beta - \gamma) (\beta - \gamma)^2 + (X + \beta - \gamma - \alpha) (\gamma - \alpha)^2 + (X + \gamma - \alpha - \beta) (\alpha - \beta)^2 = 0.$$
(G. L.)

Les trois racines sont α , β , γ .

L'identité facile à vérisier,

 $8\alpha\beta\gamma + \alpha(\beta - \gamma)^2 + \beta(\gamma - \alpha)^2 + \gamma(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$, donne, par un changement de notation, la suivante

 $2(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) + \sum (b+c-a)(b-c)^2 = 2abc.$

En remplaçant a par $x - \alpha$, etc., on obtient, dans le

^(*) Nous n'avons reçu aucune solution de cette question.

premier membre, l'équation proposée. Les racines cherchées sont donc α , β , γ . On trouvera beaucoup d'autres équations, très simples, par cette transformation qu'on pourrait appeler la transformation d'écriture.

OUESTION 604

Solution par M. LECOMTE, élève au collège Chaptal.

Du point où le cercle inscrit dans abc donné touche ab, on élève une perpendiculaire à ce côté, cette droite est rencontrée en α par la perpendiculaire élevée de a $\dot{\alpha}$ ac et en β par la perpendiculaire élevée de b à bc. Démontrer que $\alpha \alpha - b\beta = \alpha \beta$.

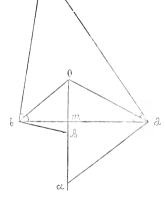
(Mannheim.)

Soit O le centre du cercle inscrit.

Dans le triangle βOb , l'angle b est complémentaire de Obc. L'angle βOb est, de même, égal à $\frac{\pi}{2}$ — Obc, puisque mOb est rectangle et que bO est bissectrice. Donc $b\beta = O\beta$. De même, dans αaO , on a donc

O
$$\beta$$
 - O α = $a\alpha$ - $b\beta$.
O α = $a\alpha$.
O β = $b\beta$,

donc $0z - 0\beta = az - b\beta$, ou enfin $a\beta = az - b\beta$

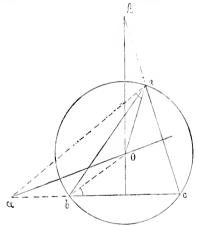


Nota. — Solutions analogues par MM. Angel Bozal-Obejero, professeur à l'Institut libre de Bilbao; G. Daly; A. Droz-Farny; Jean Négretzu; Alfred Champion; A.-C. Davidoglou.

QUESTION 605

Solution par M. Dhavernas, élève au lycée Michelet.

On donne un triangle abc. La perpendiculaire à ac élevée du milieu de ce côté coupe be au point a. De même, la perpendiculaire



à bc, élevée du milieu de ce côté, coupe ac au point β .

Démontrer que a, β, α, b et le centre du cercle circonscrit à abc appartiennent à une même circonférence du cercle. (Mannheim.)

Tirons az. On a (en désignant par O le centre du cercle abc.

$$\widehat{aa0} = \widehat{aac} - \widehat{0ac} = \widehat{c} - (1^{a}\widehat{b})$$

$$\widehat{aa0} = 1^{a} - \widehat{a} = \widehat{0bc}.$$

Ce qui exprime que α appartient au cercle ab0;

on verrait de même que \beta appartient au même cercle. Ce cercle a d'ailleurs son centre au milieu de la droite qui joint O au pôle de ab par rapport au cercle O.

Nota. — Solutions analogues par MM. Jean Négretzu; Alfred Champion; A. Droz-Farny; Davidoglou.

M. Barisier nous a aussi adressé une solution trigonométrique. Il observe que le rayon du cercle en question est égal à $\frac{R}{2\cos C}$; R désignant, bien entendu, le rayon de la circonférence circonscrite au triangle *abc*.

QUESTION 606

Solution par M. A. Droz-Farny.

Par le milieu O de la bissectrice intérieure de l'angle A d'un' triangle ABC, on mène une perpendiculaire à cette bissectrice. Cette perpendiculaire rencontre le côté AB en B' et le côté AC en C'. Montrer que, D étant le point de rencontre des droites CB et C'B :

4º Le triangle CBD et le quadrilatère AB'DC' ont des aires équivalentes;

2º La droite AD est la symédiane de l'angle A;

3º Si l'on a, entre les côtés du triangle ABC, la relation

$$\overline{BC}^2 = AB.AC$$
,

le point D est son centre des symédianes. (E.-N. Barisien.)

Prolongeons BA d'une longueur AL = AC et complétons le losange CALE dont les diagonales se croisent en O'. Les diagonales LC et AE sont respectivement parallèles à la bissectrice AA' et à B'C'. Comme

$$\frac{\mathrm{LO'}}{\mathrm{O'C}} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{OA'}},$$

les points B, O, O' sont en ligne droite.

Comme
$$\frac{AO'}{O'E} = \frac{B'O}{O'C}$$
, les points

B, C', E sont aussi en ligne droite; d'où une nouvelle construction des points C' et B'. Il est facile maintenant de calculer la longueur de AC': on a

$$\frac{AC'}{LE} = \frac{AB}{BL}$$

d'où

$$AB' = AC' = \frac{bc}{b+c}.$$

1° Le triangle BCE est équivalent à la moitié du losange ACEL donc aussi BCE équivalent à ECC + ALC.

Comme AB' = AC' et $\overline{AC} = AL$ on a:

triangle ALC' équivalent AB'C.

Il en résulte

BCC' équivalent CB'A

CDC' = CDC'

par soustraction: triangle BDC équivalent AB'DC'

2º Appliquons le théorème de Ceva aux transversales BC',

CB', ADR. Comme AB' = AC', on obtient

$$\frac{BR}{RC} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{\frac{c^2}{b+c}}{\frac{b^2}{b+c}} = \frac{c^2}{b^2}.$$

AD est donc la symédiane issue de A.

 $3^{\rm o}$ Calculons le rapport $\frac{\rm AD}{\rm DR}$; pour cela , appliquons le théorème de Ménélaus au triangle ABR coupé par la transversale B'DC.

Il en résulte : $\frac{AD}{DR} = \frac{AB' \cdot BC}{BB' \cdot RC} = \frac{bc}{c^2} \cdot \frac{a}{ab^2} = \frac{b^2 + c^2}{bc} \cdot \frac{a}{bc}$

 Donc

 $\frac{AD}{AR} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + bc}.$

K étant le centre des symédianes, on sait que

$$\frac{AK}{AR} = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Pour que K coïncide avec D il faut donc que $a^2 = bc$.

Remarque. — Si en A', pied de la bissectrice intérieure, on élève, sur cette dernière, une perpendiculaire, elle rencontrera le côté AC en X; AX sera la moyenne harmonique entre les côtés AB et AC.

Nota. — Nous avons reçu des solutions trigonométriques de MM. Dhavernas; A. Champion et Davidoglou.

QUESTION 608

Solution par M. Négretzu.

Montrer que l'élimination du paramètre t entre les deux équations $a(t^6 + 1) - 3(x - a)t^2(t^2 + 1) = 0$,

 $t^3(x - a) + 3tx - 2y = 0$

conduit à l'équation

 $4(x^2 + y^2) - 5ax + a^2 = 0.$ (E.-N. Barisien.)

Remarquons d'abord que la première équation est divisible par $t^2 + 1$ et par suite s'écrit

$$a(t^{4} - t^{2} + 1) - 3t^{2}(x - a) = 0,$$
ou
$$a(t^{2} + 1)^{2} = 3t^{2}x,$$
d'où
$$t^{2}\sqrt{a} - t\sqrt{3x} + \sqrt{a} = 0.$$

On est donc conduit à éliminer t entre les équations

$$(1) t^2\sqrt{a}-t\sqrt{3x}+\sqrt{a}=0,$$

(2)
$$t^{3}(x-a) + 3tx - 2y = 0.$$

En multipliant l'équation (1) successivement par t^2 et par t, et l'équation (2) par t, on obtient le système

$$\begin{cases} t^{4}\sqrt{a} - t^{3}\sqrt{3x} + t^{2}\sqrt{a} = 0, \\ t^{3}\sqrt{a} - t^{2}\sqrt{3x} + t\sqrt{a} = 0, \\ t^{2}\sqrt{a} - t\sqrt{3x} + \sqrt{a} = 0, \\ t^{4}(x - a) + 3t^{2}x - 2ty = 0, \\ t^{5}(x - a) + 3tx - 2y = 0. \end{cases}$$

Posons (c'est la méthode de M. Sylvester), $t^2 = t'$, $t^3 = t''$ et $t^4 = t'''$; on a alors le système d'équations linéaires, par rapport à t, t', t'', t'''

$$\begin{cases} t'''\sqrt{a} - t''\sqrt{3x} + t'\sqrt{a} = 0, \\ t''\sqrt{a} - t'\sqrt{3x} + t\sqrt{a} = 0, \\ t''\sqrt{a} + t\sqrt{3x} + \sqrt{a} = 0, \\ t'''(x - a) + 3t'x - 2ty = 0, \\ t''(x - a) + 3tx - 2y = 0. \end{cases}$$

Exprimons que les équations, qui composent le système ci-dessus, sont compatibles; on a

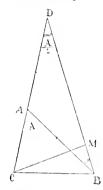
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & -\sqrt{3}x & \sqrt{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{a} & -\sqrt{3}x & \sqrt{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sqrt{a} & -\sqrt{3}x & \sqrt{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sqrt{a} & -\sqrt{3}x & \sqrt{a} \\ x - a & \mathbf{0} & 3x & -2y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & x - a & \mathbf{0} & 3x & -2y \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

En développant ce déterminant, ce que l'on peut faire sans difficulté, on trouve la relation cherchée.

QUESTION 607

Solution, par M. A. CHAMPION.

Démontrer géométriquement que dans tout triangle on a :



(b + c)
$$\sin \frac{A}{2} = a \sin \left(\frac{A}{2} + B\right)$$

(E.-N. Barisien.)

Soit le triangle ABC. Portons, sur AC prolongé, AD = AB.

Traçons BD et menons CM perpendiculaire à BD. On a:

$$CM = CD \sin \widehat{CDM} = BC \sin CBM;$$

$$(b + c) \sin \frac{A}{2} = a \sin (\frac{A}{2} + B)$$

C. Q. F. D.

Nota. — Solutions diverses par MM. Davidoglou; J.-F. Négretzu; Dhavernas; Droz-Farny.

QUESTION 609

Solution par M. Angel Bozat Obejero, professeur à l'Institut libre de Santona (Espagne).

Dans tout triangle, le produit des tròis médianes, divisé par le produit des symédianes, a pour expression

$$(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)(a^2 + b^2) : 8a^2b^2c^2$$
.
(E.-N. Barisien.)

Pour abréger, nous désignerons, respectivement, par m_a , m_b , m_c et par m'_a , m'_b , m'_c les médianes et les symédianes issues des sommets A, B, C d'un triangle dont les côtés sont a, b, c.

On a:
$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2,$$
 et
$$m_a^{\prime 2} = \frac{b^2c^2}{(b^2 + c^2)} [2(b^2 + c^2) - a^2](*).$$

^(*) Cette formule est connue; on peut l'établir notamment, comme le faisait M. Davidoglou dans la solution qu'il nous a adressée, en appliquant le théorème de Stewart, théorème très fécond et qui doit être familier aux élèves de mathématiques élémentaires.

G. L.

Par suite

$$\frac{m_a}{m_a'} = \frac{b^2 + e^2}{2bc}.$$

On trouve, par permutation circulaire des lettres, les deux rapports analogues, et en multipliant les trois égalités ainsi obtenues, on a la relation proposée.

Nota. — Solutions diverses par MM. Dhavernas, lycée Michelet; Droz-Farny et Alfred Champion.

M. A. Champion observe que la distance du sommet B au pied de la symédiane, relative au point A, est $a \cdot \frac{c^2}{b^2 + c^2}$. Ce résultat se retient assez facilement en le comparant à la formule $a \cdot \frac{c}{b+c}$ qui fait connaître la

OUESTION 610

distance du point B au pied de la bissectrice intérieure, issue de A.

Solution par M. A. DROZ-FARNY.

Soient AT_1 , BT_2 , CT_3 les tangentes en A, B, C au cercle eir-conscrit au triangle ABC; T_1 , T_2 , T_3 étant les points où ces tangentes rencontrent BC, CA, AB. On considère ces tangentes comme positives si elles rencontrent les eôtés dans les directions BC, CA, AB; négatives, si elles les rencontrent dans le sens contraire. Montrer qu'on a toujours

$$\frac{1}{AT_1} + \frac{1}{BT_2} + \frac{1}{CT_3} = 0.$$
 (Tzitzéica.)

Supposons a < b < c; AT_1 sera alors positif.

Dans le triangle ATIC on a

$$\begin{split} \frac{\mathrm{AT_1}}{b} &= \frac{\sin{(\mathrm{A} + \mathrm{B})}}{\sin{(\mathrm{A} + 2\mathrm{B})}} \\ \mathrm{d'où} & \mathrm{AT_1} &= \frac{b\sin{\mathrm{C}}}{\sin{(\mathrm{A} + 2\mathrm{B})}} = \frac{2\Delta~(^*)}{a\sin{(\mathrm{A} + 2\mathrm{B})}}, \\ \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{AT_1}} &= \frac{a\sin{(\mathrm{A} + 2\mathrm{B})}}{2\Delta} = \frac{\mathrm{R}\sin{\mathrm{A}}\sin{(\mathrm{A} + 2\mathrm{B})}}{\Delta}, \\ \sum \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{T_1}} &= \frac{\mathrm{R}}{\Delta} \sum \sin{\mathrm{A}}\sin{(\mathrm{C} - \mathrm{B})} = \mathrm{o}~; \end{split}$$

^(*) Δ désigne ici l'aire du triangle ABC; c'est une convention généralement adoptée dans la géométrie du triangle. (G. L.)

car

$$\sum \sin A \sin (B - C) = \begin{vmatrix} \sin A \sin A \cos A \\ \sin B \sin B \cos B \\ \sin C \sin C \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

Nota. — Nous avons reçu une autre solution de M. Davidoglou.

M. L'HUILLIER, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc, nous fait observer, avec raison, que cette propriété a été énoncée et démontrée (Journal 1888, p. 26), dans un article que M. Clément Thiry a consacré (loc. cit.) à l'étude des symédianes.

QUESTION 611

Solution et généralisation par M. A Droz-Farny.

On considère le point de Steiner R et les deux points ω , ω' de Brocard, d'un triangle ABC: R ω rencontre AC en M, R ω' rencontre AB en N. Les droites P ω et C ω' se rencontrent sur MN. (Tzitzéica.)

On sait que le point de Steiner R est le conjugué isogonal du point situé à l'infini sur la droite $\omega\omega'$. La transformée par points inverses de cette droite sera donc une conique circonscrite au triangle ABC et passant par les points ω , ω' , R.

Pour démontrer le théorème proposé, il suffit d'appliquer le théorème de Pascal à l'hexagone inscrit : BAC ω' R ω .

On peut remplacer ω et ω' par deux points quelconques du plan du triangle, et R par un point quelconque de la conique ABC $\omega\omega'$.

QUESTION 612

L'énoncé, comme plusieurs correspondants nous l'ont fait observer, est incorrect, le pied de la hauteur coïncidant avec le pied de la symédiane issue du sommet A du triangle rectangle ABC. Il faut prendre la droite qui va de A au réciproque du point de Lemoine, droite qui va passer par l'isotomique, sur BC, du piel de la hauteur. Alors, la propriété est évidente.

(G. L.)

Solution par M. A. CHAMPION.

On prolonge la diagonale AC = a d'un rectangle d'une longueur AE = b, puis on projette E en F et G sur AD et AB. Soient d, d' les distances de A à BD, et FG et δ la distance des points M et N, projections du point A sur BF et DG.

Montrer que l'aire S du triangle AMN est donnée par

$$_{2}S = \delta^{2}.\frac{d - d'}{a + b}.$$
 (Tzitzéica.)

Achevons le rectangle EGCD. Menons la diagonale KL et les droites AK, AL. Les angles $\widehat{1,2}$ sont respectivement égaux.

Donc les angles KAL, MAN sont égaux,

Les droites FG et BD étant parallèles, puisque A est sur

la diagonale EC, on a
$$\frac{AB}{B} = \frac{AF}{B}$$
.

et comme

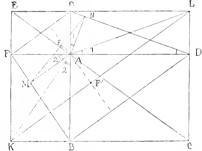
$$GD = AL,$$

 $FB = AK,$

on peut écrire

$$\frac{AK}{AN} = \frac{AL}{AM}.$$

Cette proportion et



l'égalité des angles KAL, MAN démontrent la similitude des triangles AKL, AMN. La hauteur de AKL est évidemment d-d', le côté KL = EC = a+b.

On a alors, en appelant AP la hauteur de AMN,

$$\frac{AP}{\delta} = \frac{d - d'}{a + b}$$
 et, par conséquent, $2S = \delta^2 \cdot \frac{d - d'}{a + b}$

Nota. — Autre solution par M. Davidoglou.

Solution par M. A. CHAMPION.

Résoudre les deux équations

(1)
$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}},$$

(2)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 \cdot$$
 (E.-N. Barisien.)

Posons
$$(ax)^{\frac{2}{3}} = p$$
, $(by)^{\frac{2}{3}} = q$.

Élevons l'équation (1) au cube, nous avons

$$(p+q)^3 = (a^2 + b^2)^2$$
.

L'équation (2) devient successivement :

$$\frac{p^3}{a^4} + \frac{q^3}{b^4} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2},$$

$$(b^{4}p^{3} + a^{4}q^{3})(a^{2} + b^{2})^{2} = a^{4}b^{4}(p + q)^{3}.$$

Pour q = mp, on a

$$(b4 + a4m3)(a4 + 2a2b2 + b4) = a4b4(1 + 3m + 3m2 + m3)$$

$$a3m3 + 2a6b2m3 - 3a4b4m2 - 3a4b4m + 2a2b6 + b8 = 0.$$

Cette équation se décompose (*) ainsi:

$$(a^2m - b^2)^2(a^4m + 2a^2b^2m + b^4 + 2a^2b^2) = 0.$$

D'où

$$m' = m'' = \frac{b^2}{a^2}, \qquad m''' = -\frac{b^2(b^2 + 2a^2)}{a^2(a^2 + 2b^2)},$$
et
$$x^2 = \frac{a^4(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^3} \qquad x^2 = \frac{a^4(a^2 + 2b^2)^3}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^3},$$

$$y^2 = \frac{b^4(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^3} \qquad y^2 = -\frac{b^4(b^2 + 2a^2)^3}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^3}.$$

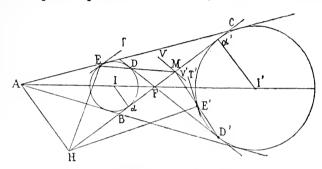
^(*) Détail de la décomposition en facteurs :

 $[\]begin{array}{lll} a^{a}m^{3}-a^{4}b^{4}m-2a^{4}b^{4}m+2a^{2}b^{6}+2a^{6}b^{4}m^{3}-2a^{4}b^{4}m^{2}-a^{4}b^{4}m^{2}-b^{8}\equiv0,\\ a^{4}m\left(a^{4}m^{2}-b^{4}\right)-2a^{2}b^{4}\left(a^{2}m-b^{2}\right)+2a^{4}b^{2}m^{2}\left(a^{2}m-b^{2}\right)-b^{4}\left(a^{4}m^{2}-b^{4}\equiv0,\\ \left(a^{3}m-b^{2}\right)\left(a^{6}m^{2}+a^{4}b^{2}m-2a^{2}b^{4}+2a^{4}b^{2}m^{2}-a^{2}b^{4}m-b^{6}\right)\equiv0,\\ \left(a^{2}m-b^{2}\right)^{2}\left[a^{2}(a^{4}m^{2}-b^{4})a+a^{2}m^{2}\left(-b^{2}\right)+b^{2}\left(a^{4}m^{2}-b^{4}\right)+a^{2}b^{2}m\left(a^{2}m-b^{2}\right)\right]\equiv0,\\ \left(a^{2}m-b^{2}\right)^{2}\left(a^{4}m+a^{2}b^{2}+a^{2}b^{2}+a^{2}b^{2}m+b^{4}+a^{2}b^{2}m\right)\equiv0. \end{array}$

Solution par M. DAVIDOGLOU.

Soient H le pied de la hauteur AH d'un triangle, E et E' les points de contact du cercle des neuf points avec le cercle inscrit et le cercle ex-inscrit situé dans l'angle A; D et D', les points de contact de la seconde tangente commune intérieure à ces deux cercles; les triangles DAD' et AEE' sont semblables, et la droite HC est la bissectrice commune des angles DHE' et EAD'. (Vautré.)

La figure et les notations sont celles de la page 83. On a vu (loc. cit.) que les quadrilatères FHDE, HFD'E' sont inscrip-



tibles. Le quadrilatère MDD'H l'est aussi, car

 $FD.FD' = F\alpha.F\alpha' = \overline{M\alpha^2} - \overline{MF^2} = MF.HF.$

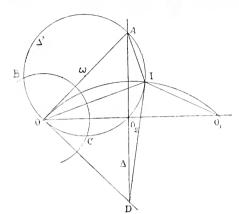
Alors: $\widehat{DHD'} = 180^{\circ} - \widehat{EME'} = \widehat{EHE'},...$ etc. Puis: $\widehat{MHE'} = \widehat{MD'D} = \widehat{MHD};$ $\widehat{MHE} = \widehat{MHD'},$

C. Q. F. D.

 ${\it Nota.}$ — Autre solution par M. L'Huillier, répétiteur au lycée de Barle-Duc.

QUESTION 617 Solution par M. L'HUILLIER.

On donne une circonférence de centre O et une droite Δ.
D'un point A, mobile sur Δ, on mêne les tangentes AB, AC, et l'on trace la circonférence Δ', circonscrite à ABC; la tangente en O, à Δ', coupe Δ en un point D; de D, on peut mener à Δ' une autre tangente DI. Quel est le lieu de I? (G. L.)



Abaissons de O, sur Δ, la perpendiculaire OO₂ et traçons la circonférence de centre D et de rayon DO; elle coupe Δ' en I et OO₂ en O₁, symétrique de O par rapport à Δ.

On a évidemment $\widehat{1O_1O} = \widehat{AOI}$, $\widehat{1O_2O_1} = \widehat{OAI}$, donc $\widehat{O_2IO}$, est droit.

et le lieu cherché est la circonférence ayant O₂O₁ pour diamètre.

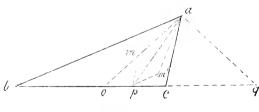
Nota. — Autres solutions par MM. A. Champion et Droz-Farny.

QUESTION 619

Solution par M. Elgé.

On donne un triangle abc. On mène la bissectrice intérieure de l'angle de ce triangle dont le sommet est a ; cette droite coupe bc au point p. On mene pm parallèlement à ac et cm perpendiculaires à ap. Ces deux droites se coupent en m. Démontrer que am est une médiane du triangle. (Mannheim.)

Prolongeons am qui rencontre bc en o; il faut montrer que



o est le milieu de bc. Soit aq la bissectrice extérieure, aq est parallèle à cm (*) et les triangles sem-

blables donnent $\frac{om}{oa} = \frac{op}{oc} = \frac{oc}{oq}$.

^(*) Cette droite qui passe par m', par oubli, n'a pas été tracée.

On a donc $\overline{oc^2} = op .oq$; les points b, c; p, q, formant une division harmonique, la relation précédente prouve que o est le milieu de bc.

Nota. — Nous avons reçu diverses solutions de MM. Dhavernas, élève au lycée Michelet; H. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc; A. Champion; Davidoglou; Droz-Farny.

M. Champion ajoute à sa solution une remarque intéressante et facile à vérifier. Si, par le point p, on mène pm', parallèlement à ab, cette

droite coupe cm en m'; am' est la sumédiane.

QUESTION 620 Solution par M. X.

Décrire trois cercles tangents deux à deux en trois points donnés A, B, C, construire les centres A', B', C' de ces trois cercles et calculer leurs rayons en fonction des distances a, b, c entre B et C, C et A, A et B. (E. Lebon.)

En supposant le problème résolu, on voit immédiatement que O est le centre du cercle circonscrit à ABC; A' est l'intersection des perpendiculaires menées, en B, et en C, respectivement à OB et à OC; B' etc... On a donc

$$A'C = \frac{a}{2 \cos A} = \frac{abc}{b^2 + c^2 - a^2}, \text{ etc...}$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Davidoglou, Droz-Farny, A. Champion.

QUESTIONS PROPOSÉES

668. — On donne sur un plan une circonférence C et un point O. D'un point de cette courbe, comme centre, on décrit une circonférence de cercle qui passe par O et l'on prend l'axe radical de cette courbe et de C. Démontrer que, lorsque le centre pris sur C se déplace sur cette courbe, cet axe radical reste tangent à une circonférence de cercle.

(Mannheim.)

669. — On donne un rectangle ABCD, dans lequel B, D désignent deux sommets opposés. Soient P, P' deux cercles.

de centres O, O', tangents entre eux, et touchant respectivement: AB, en B; AD en D.

La droite OO' enveloppe une circonférence. (G. L.)

670. — Un triangle ABC étant donné, on considère dans son plan deux points M, M', symétriques l'un de l'autre relativement au milieu D de BC. Si BM et CM rencontrent AC, AB en E, F, démontrer que les triangles M'CE, M'FB sont équivalents et présentent le même sens rotatoire.

Appliquer cette proposition à démontrer que, dans un quadrilatère plan quelconque ABCD, convexe ou non, où AD, BC se coupent en L et AC, BD en M, les milieux de AB, CD, LM sont trois points en ligne droite (*). (Bernès.)

671. — Dans un triangle ABC on considère deux points M, M' symétriques l'un de l'autre relativement au milieu de BC, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les droites AM, AM' soient isogonales, est que les angles ABM, ACM soient égaux et de sens contraire.

En conclure le lieu des isogonaux N, N' de deux points M, M' symétriques relativement au milieu de BC et tels que AM, AM' soient deux droites isogonales. Quelle est, sur ce lieu, la situation relative de N et N'? Montrer que les deux points M, M' sont isoptiques (ou jumeaux). (Bernès.)

672. — On donne les relations

$$(\lg x + \lg y) \lg(x + y) = (\lg y + \lg z) \lg(y + z) = (\lg z + \lg x) \lg(z + x),$$

on demande d'isoler les inconnues; c'est-à-dire de tirer, des relations en question, les suivantes

$$f(x) = f(y) = f(z)$$
. (**)

Le Direct eur-gérant, G. DE LONCHAMPS.

^(*) On peut aussi l'appliquer à la question suivante.

^(**) J'ai proposé cette question dans le journal de M. Schoute, il y a quelques mois. Elle n'a pas été résolue; c'est pour ce motif que je la propose ici, de nouveau.

NOTE SUR L'ÉQUATION TRIGONOMÉTRIQUE

 $a \sin x + b \cos x = c$.

Par M. Droz-Farny, professeur au lycée de Porrentruy.

La résolution de cette équation, lorsque a, b et c sont des valeurs numériques données, est bien connue.

On introduit un angle auxiliaire q, en posant:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

Il en résulte

$$\sin\left(a+\varphi\right) = \frac{c}{a}\cos\varphi.$$

Pour que l'angle X soit réel, on doit avoir

$$1 \geqslant \frac{c}{a}\cos\varphi \geqslant -1$$
, ou $\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \leqslant 1$, $c \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

d'où

Si a, b, c représentent des longueurs données, il est facile de construire graphiquement les angles x qui vérifient l'équation proposée.

Sur les deux côtés d'un angle droit C, on porte les longueurs CA = b et CB = a. L'angle CBA est égal à l'angle auxiliaire φ .

Portons, sur le côté AC, une longueur AD = c et décrivons, du point D comme centre, avec un rayon égal à a, un arc de cercle qui coupe l'hypoténuse AB aux points E et F.

 $\begin{array}{c} \text{Dans les triangles DEA ou DFA on a:} \\ \frac{\sin \, \text{DEA}}{\sin \, \text{DFA}} \end{array} \right\} : \sin A = DA : \left\{ \begin{array}{c} \text{DE} \\ \text{DF} \end{array} \right.$

L H E

de là, on tire $\sin \text{DEA} = \sin \text{DFA} = \frac{c \cos \varphi}{a}$

Les angles DEA et DFA représentent donc les deux valeurs de l'angle $x + \varphi$.

Soient L et M les points d'intersection des droites DF et DE avec le côté BC, on a donc pour l'angle x cherché, les deux solutions:

$$x' = \widehat{\mathrm{BLF}}$$
 ou $x'' = \widehat{\mathrm{BME}}$.

Pour que le problème soit possible, il faut que l'arc de cercle EF, décrit de D comme centre, avec a pour rayon, coupe, ou, tout au moins, touche. AB.

En abaissant la perpendiculaire DH. sur AB, on doit donc avoir

Les triangles semblables donnent

$$\frac{\text{DH}}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Les relations (1) et (2) prouvent que

$$c \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On retrouve ainsi la condition connue.

Une méthode identique fournirait la construction des angles x vérifiant l'équation

 $a \sin x - b \cos x = c$.

QUELQUES PROPRIÉTÉS

DU CERCLE CONJUGUÉ A UN TRIANGLE

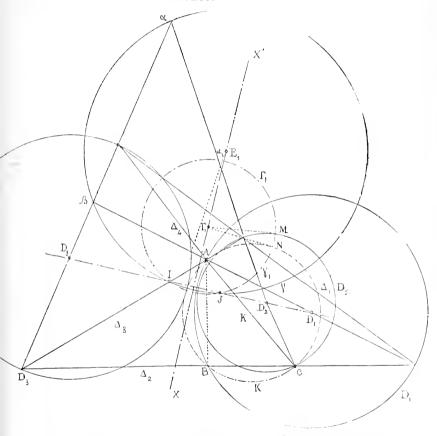
Par S. Chassiotis.

I. — On sait que le cercle conjugué à un triangle est tel que la polaire de chaque sommet du triangle, par rapport à ce cercle, est le côté opposé. Il en résulte que le cercle conjugué à un triangle est le cercle orthotomique aux cercles décrits sur les côtés du triangle comme diamètres.

Cela posé, soient quatre droites, Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 ; considérons le cercle Γ_1 conjugué au triangle $\Delta_2\Delta_3\Delta_4$, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème I. — Les quatre cercles Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 sont orthogonaux aux cercles D_1 , D_2 , D_3 , décrits sur les diagonales du quadrilatère comme diamètres.

En effet, le centre de la circonférence Γ_1 est l'orthocentre du triangle $\Delta_2\Delta_3\Delta_4$; son rayon est égal à la puissance de l'orthocentre par rapport aux cercles D_1 , D_2 , D_3 . Or, ce point se trouve sur l'axe radical des circonférences D_1 , D_2 , D_3 ; on en conclut le théorème énoncé.



Corollaire I. – Les cercles Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 ont même axe radical.

De plus, ils coupent la droite des milieux des diagonales du quadrilatère en deux poiuts I et J qui sont les points limites relatifs aux cercles D_1 , D_2 , D_3 .

Remarque I. — On sait que le centre d'une hyperbole équilatère inscrite à un triangle appartient au cercle conjugué du triangle; donc, les points I et J sont les centres de deux hyperboles équilatères inscrites dans le quadrilatère $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$. D'autre part, le centre d'une telle hyperbole se trouve à l'intersection de la droite des milieux des diagonales avec le cercle E circonscrit au triangle formé par les diagonales.

Corollaire II. — Le cercle circonscrit au triangle des diagonales et les cercles conjugués aux divers triangles formés par les côtés d'un quadrilatère ont même axe radical. Par suite, le cercle circonscrit au triangle des diagonales et les cercles decrits sur les diagonales comme diamètres se coupent à angle droit.

Remarque II. — Supposons qu'on commence à démontrer directement que le cercle E est orthogonal aux cercles D_1 , D_2 , D_3 et que le centre d'une hyperbole équilatère inscrite dans le quadrilatère $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$ se trouve à l'intersection du cercle E avec la droite des milieux des diagonales du quadrilatère. Alors, d'après le théorème I, on en conclut que le centre d'une hyperbole équilatère inscrite dans un triangle se trouve sur le cercle conjugué à ce triangle; ce théorème est bien connu.

Théorème II. — Les points de l'intersection des cercles E, Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 avec les diagonales du quadrilatère forment trois divisions en involution. Les points doubles de ces divisions sont les sommets du quadrilatère; les points centraux sont les milieux des diagonales.

En effet, les cercles E, Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , Γ_4 passent par les deux points I et J.

Ce théorème peut encore s'énoncer de la manière suivante:

Théorème III. — Étant donnés un triangle ABC et une transversale A'B'C'; si, sur le côté AB, on considère une division en involution, ayant C' pour point central et dont la puissance est égale au produit C'A.C'B; et, sur les autres côtés, les divisions analogues; les points doubles de ces divisions sont, trois à trois, en ligne droite.

Ainsi, les six points doubles sont situés sur quatre droites qui forment un quadrilatère complet.

Considérons maintenant, dans un triangle ABC, deux transversales réciproques A'B'C' et A"B"C" et appliquons successivement à chacune des transversales le théorème III. A chacune des deux transversales considérées correspond un quadrilatère, les deux quadrilatères ainsi obtenus sont réciproques, c'est-àdire que deux côtés homologues sont des transversales réciproques.

Remarque III. — Considérons maintenant deux quadrilatères réciproques; avec leurs huit côtés, on peut former 56 triangles et, par suite, on peut leur construire 56 cercles conjugués; or, avec ces 8 côtés on peut former 70 quadrilatères, d'après le corollaire I du théorème I, ces 56 cercles ont même axe radical 4 à 4. Nous avons donc 70 axes radicaux distincts qui coupent les 56 cercles en 140 points situés sur une même circonférence qui, d'après le corollaire II du théorème I, est la circonférence circonscrite au triangle par rapport auquel les quadrilatères sont réciproques.

Cette remarque peut se généraliser bien facilement, et conduit aux théorèmes suivants:

Théorème IV. — Étant donnés un triangle $\alpha\beta\gamma$ fixe, et une transversale A'B'C', variable dans son plan; on considère les six points qui, d'après le théorème III, lui correspondent. Avec A' comme centre et un rayon égal à $\sqrt{A'B.A'C}$, on décrit une circonférence; les trois circonférences ainsi obtenues ont même axe radical; cet axe passe par un point fixe lorsque la transversale A'B'C' varie, ce point fixe étant le centre du cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$.

Théorème V. — Le lieu des points (I et J), points limites relatifs aux cercles D_1 , D_2 , D_3 , est la circonférence circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$.

Des théorèmes précédents résulte encore l'énoncé suivant:

Théorème VI. — Étant donné un triangle ABC, il existe trois hyperboles équilatères ayant un de leurs foyers au centre des hauteurs et tangentes à deux côtés du triangle. Elles sont les polaires réciproques des cercles décrits sur les côtés du triangle ABC comme diamètres, par rapport au cercle conjugué.

Théorème VII. — Les directrices relatives au foyer commun sont les perpendiculaires abaissées des points A, B, C, sur les droites joignant le foyer commun aux milieux des côtés.

Théorème VIII. — Les asymptotes de ces hyperboles sont les tangentes menées, des milieux des côtés, au cercle conjugué.

EXERCICES DIVERS

Par M. Aug. Boutin.

405. — On considère la suite

 $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 6$, $u_3 = 35$... $u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}$.

Aucun nombre de cette suite n'est premier.

Les termes de rang pair sont pairs; les termes de rang impair satisfont à la relation :

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2.$$

En outre du facteur 2, les termes de rang pair sont décomposables par la formule:

$$u_{2n} = 2u_n (3u_n - u_{n-1}).$$

On en déduit, pour la somme des termes de rang impair:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n+1} = u_{n+1}^2$$

et, pour celle des termes de rang pair:

$$u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n} = u_n u_{n+1}$$

On peut encore vérifier les formules:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 = \frac{1}{32} (u_{2n+1} - 2n - 1),$$

$$u_1^2 + u_3^2 + u_5^2 + \dots + u_{2n-1}^2 = \frac{1}{16} (\frac{u_{4n}}{12} - n),$$

$$\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \frac{1}{u_3 u_4} + \dots + \frac{1}{u_n u_{n+1}} = 6 - \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}.$$

Cette suite remarquable est telle que le carré de chacun de ses termes est un triangulaire. S'il existe des triangulaires autres que o, 1 et 6, dont le carré soit un triangulaire, ils sont donc compris dans cette suite (question 164 de l'Intermédiaire). Les seuls nombres u_n , qui puissent être triangulaires, sont ceux où n affecte l'une des formes: 6K, 12K + 1, 12K + 2.

On vérifie directement qu'il n'y en a pas jusqu'à:

$$u_{24} = 417501372047787720.$$

406. — A un carré on ajoute le triangulaire de même rang. Dans quel cas la somme est-elle un carré?

On doit résoudre, en nombres entiers, l'équation :

$$x^2 + \frac{x(x+1)}{2} = y^2$$
.

On a toutes les solutions par les suites:

$$y_1 = 10, \quad y_2 = 980, \quad y_3 = 96030 \quad \dots \quad y_n = 98y_{n-1} - y_{n-2};$$

 $x_1 = 8, \quad x_2 = 800, \quad x_3 = 78406 \quad \dots \quad x_n = 98x_{n-1} - x_{n-2} + 16.$

407. — Quels sont les triangulaires qui ne différent d'un cube que d'une unité?

On sait qu'aucun triangulaire n'est un cube.

Les triangulaires qui répondent à la question sont les solutions de

$$y^{3} \pm 1 = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$1^{3} - 1 = 0,$$

$$3^{3} + 1 = \frac{7 \cdot 8}{2},$$

$$16^{3} - 1 = \frac{90 \cdot 91}{2},$$

$$20^{3} + 1 = \frac{126 \cdot 127}{2}.$$

Ce sont d'ailleurs les seules solutions.

408. — Tout carré impair, augmenté de 2, est, de deux façons au moins, une somme de trois carrés.

En dehors de la décomposition :

On trouve:

$$(2n+1)^2+2=(2n+1)^2+1^2+1^2$$
, un multiple de 3, ou un multiple de 3 augme

on a, n étant un multiple de 3, ou un multiple de 3 augmenté ou diminué d'une unité:

$$\begin{array}{l} (6p+3)^2 + 2 = (4p+3)^2 + (4p+1)^2 + (2p+1)^2, \\ (6p\pm1)^2 + 2 = (4p\pm1)^2 + (4p\pm1)^2 + (2p\mp1)^2. \end{array}$$

BACCALAURÉATS

Académie de Rennes.

Questions au choix. — 'a') Établir le théorème des projections et en déduire la démonstration générale des formules qui font connaître $\sin (a \pm b), \cos (a \pm b)$ en fonction de $\sin a, \sin b, \cos a, \cos b$.

(b) Trouver la limite du rapport $\frac{\sin x}{x}$, lorsque x tend vers zéro, en démontrant les principes sur lesquels on s'appuie.

(c) Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Discussion. - Comparaison des solutions géométriques et trigonomé-

triques.

Problème. — On donne une circonférence O de rayon R et un point A situé à la distance OA = a du centre O. Par le point A, on mène une sécante ACB telle que AC soit le plus grand segment de AB partagé en moyenne et extrême raisop. Trouver, en fonction de R et de a:

1º Les expressions de AB, AC et des projections des rayons OB, OC

sur OA;

2º Le volume engendré par le secteur circulaire BOC, tournant autour de OA:

3° Ce que devient le volume quand on suppose :

$$a = R(2 + \sqrt{5}).$$

Académie de Toulouse.

BAGCALAURÉAT COMPLET

I. – Vérifier l'identité cos
$$x = \frac{1}{1 + \tan x \tan \frac{x}{2}}$$

II. Calculer les sinus et les cosinus des arcs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$.

III. Étant donné le côté a d'un triangle équilatéral ABC, on inscrit dans ce triangle un second triangle équilatéral DEF. Déterminer la distance AD de telle façon que le rapport de l'aire du triangle DEF à l'aire du triangle ABC soit égal à un nombre donné m^2 .

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

On donne la base AC, que l'on désignera par a, et la hauteur correspondante h d'un triangle ABC. Calculer les côtés d'un rectangle DEFG inscrit dans ce triangle, sachant qu'une diagonale de ce rectangle a une longueur donnée m. — Discuter.

OUESTION 618

Solution par M. L'HUILLIER, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

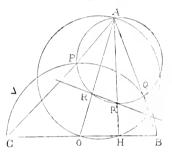
On considère un triangle ABC. Sur BC comme diamètre on décrit un cercle Δ qui coupe AB en P, AC en Q. La polaire de A par rapport à Δ coupe le cercle APQ en deuxpoints R et R'. L'une des droites AR, AR' est la hauteur correspondant à BC; l'autre est la médiane. (G. L.)

Le cercle circonscrit au triangle APQ est le cercle décrit sur AR' comme diamètre, R' étant le point de rencontre des hauteurs BP et CQ. La polaire de A passe par le point R' et AR' est la troisième hauteur du triangle.

Soit R le second point d'intersection de la polaire de A avec le cercle APQ, AR est perpendiculaire à RR' et par suite passe par le centre O de Δ , point milieu de BC.

(Autrement) (*). — Transformons la figure, en prenant A pour centre d'inversion et AP.AC = AQ.AB pour module.

Le cercle Δ est sa propre transformée. Le cercle APQ devient la droite BC, et la polaire de A, par rapport à Δ, est le cercle ayant pour diamètre la droite joignant A au centre de Δ, c'est-à-dire au milieu de BC. Ainsi, les transformés des points R et R' sont: le milieu de BC et le pied de la hau-



teur H, issue de A. Les points R et R' sont donc bien situés: l'un, sur la médiane; l'autre, sur la hauteur.

Nota. — Solutions diverses par MM. Alfred Champion, Droz-Farny, Davidoglou.

QUESTION 621

Solution, par M. Droz-Farny, professeur au lycée de Porrentruy.

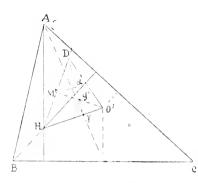
On donne un tétraédre quelconque. De l'un de ses sommets, on mène le plan perpendiculaire à la face opposée à ce sommet, et qui contient le point de rencontre des hauteurs du triangle formant cette face. Il y a ainsi quatre plans : démontrer qu'ils se coupent au même point.

(Mannheim.)

Soient, dans un triangle ABC quelconque, H l'orthocentre, γ le centre de gravité, O' le centre du cercle circonscrit. D'après un théorème bien connu, dù à Euler, ces trois points sont en ligne droite, et $H_{\gamma} = 2\gamma O'$. Joignons un point quel-

 $^{(\}mbox{\ensuremath{^{\ast}}})$ Cette solution est de M. Dhavernas, élève au lycée Michelet.

conque D' du triangle à ces trois points, et soient M' le point milieu de HD' et G' le point qui divise $\gamma D'$ suivant



le rapport $\gamma g': g'D' = 1:3$. On voit aisément que O', G' et M' sont en ligne droite, et que G' est le point milieu de M'O'. Soit, en effet, α le point milieu de $\gamma D'$; M' α sera égal et parallèle à $\gamma O'$, donc M' $\gamma O'\alpha$ étant un parallélogramme, la diagonale M'O' est divisée en G' en parties égales. Consi-

dérons maintenant le tétraèdre ABCD, D' étant la projection du sommet D sur la base ABC. Il en résulte que O' et G' seront, sur la même base, les projections du centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre et du centre de gravité G de ce tétraèdre. Si donc on élève, en M', une perpendiculaire sur la face, elle coupera la droite fixe OG en un point bien déterminé M, appartenant au plan DD'H, et, par conséquent, aux quatre plans analogues, et tel que MG = GO.

Remarque.— M est le centre de l'hyperboloïde des quatre hauteurs du tétraèdre; il résulte en outre de la démonstration précédente, ce théorème dù à Joachimsthal:

Dans tout tétraèdre, le centre M de l'hyperboloïde des hauteurs, le centre de gravité G et le centre O de la sphère circonscrite, sont trois points en ligne droite et tels que MG = GO.

QUESTION 622

Solution par M. J. S. MACKAY, professeur à l'Université d'Edimbourg.

Soient B₁ et C₁ les milieux des côtés AC et AB du triangle ABC, P un point quelconque du côté BC. Les droites PB₁ et PC₁ coupent respectivement AB et AC en B₂ et C₂. Démontrer que la droite B₂C₂ est parallèle à AP et qu'elle coupe le côté BC en un point Q tel que

$$\frac{QC}{QB} = \left(\frac{PC}{PB}\right)^2 \cdot \quad \text{(M. d'Ocagne.)}$$

Les côtés du triangle ABC, coupés par les transversales PB,B, PC,C1, donnent

$$\frac{\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CB_1}{AB_1}}{\frac{BP}{CP} \cdot \frac{AB_2}{BB_2}} = \tau \quad \text{et} \quad \frac{\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CC_2}{AC_2}}{\frac{BP}{CP} \cdot \frac{AC_1}{BC_1}} = \tau ;$$

$$\frac{\frac{BP}{CP} \cdot \frac{AB_2}{BB_2}}{\frac{BP}{CP} \cdot \frac{AB_2}{AC_2}} = -\tau , \quad (a)$$

d'où d'où

$$\begin{aligned} &\text{d'où} \\ &\frac{AB_2}{BB_2} = \frac{CC_2}{AC_2} \\ &\text{De là, on tire} \\ &\frac{AB_2}{AB} = \frac{CC_2}{AC}, \\ &\text{et} \\ &\frac{AB_2}{AC_1} = \frac{CC_2}{CB_1} = \frac{PC_2}{PC_1}, \\ &\text{à cause des parallèles } C_1B_1 \text{ et} \\ &\text{BC. Ainsi } B_2C_2 \end{aligned}$$

B₂
P C

Les côtés du

est parallèle

à AP.

triangle ABC, coupés par la transversale QC2B2, donnent

$$\frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CC_2}{AC_2} \cdot \frac{AB_2}{BB_2} = 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{BQ}{CQ} = \frac{AC_2}{CC_2} \cdot \frac{BB_2}{AB_2}.$$

Mais il résulte de (a) que

$$\left(\frac{BP}{CP}\right)^2 = \frac{BB_2}{AB_2} \cdot \frac{AC_2}{CC_2}$$

donc, enfin, etc.

Nota. — Autres solutions par MM. A. Champion, Droz-Farny, David Glou, H. L'Huhlier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

QUESTION 623 Solution par M. A. Champion.

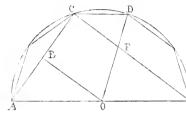
Démontrer que l'apothème du pentagone régulier est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit augmenté de la moitié du côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle. (Mannheim.) Les triangles OBF, CDF, évidemment isoscèles, donnent:

$$OB = BF,$$

$$CD = CF.$$

$$OE = \frac{CB}{2} = \frac{OB + CD}{2}.$$

Solution analytique (*). — Le côté du pentagone inscrit dans un cercle de rayon R ayant



pour valeur
$$P = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

on aura pour son apothème:

$$A^{2} = R^{2} - \frac{R^{2}}{16} (10 - 2\sqrt{5}),$$

= $\frac{R^{2}}{16} (6 + 2\sqrt{5}),$

A =
$$\frac{R}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1),$$

A = $\frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1) + \frac{R}{2}.$

Or, le côté du décagone régulier, inscrit dans un cercle de rayon R est $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$; donc, etc...

Nota. — Solutions diverses par M. Jean Négrétzu, à Dobridor (Roumanie); L. Gorens; Bozal-Obejero, professeur à l'institut de Bilbao (Espagne); H. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

QUESTION 624

Généralisation par M. A. Droz-Farny.

1° Dans un triangle ABC, trouver le point M pour lequel on a $\overline{AM}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{AB}^2$.

2. Dans un triangle ABC trouver le point M pour lequel on a $\overline{AM^2} - \overline{BC^2} = \overline{BM^2} - \overline{CA}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{AB}^2$.

(E. Lemoine.)

^(*) Cette solution est de M. Droz-Farny.

D'après une question proposée par M. E. Lemoine dans

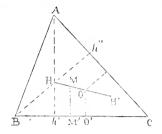
Mathesis, cherchons le point M pour lequel

 $\overline{MA}^2 + \lambda a^2 = \overline{MB}^2 + \lambda b^2 = \overline{MC}^2 + \lambda c^2$.

Supposons b > c, on a

$$\overline{MC}^2 - \overline{MB}^2 = \lambda(b^2 - c^2).$$

Si, de M, on abaisse la perpendiculaire MM' sur BC, on aura aussi $\overline{M'C^2} - \overline{M'B^2} = \lambda(b^2 - c^2)$. Représentons par H' le pied



de la hauteur relative à BC et par O' le point milieu de ce côté. Comme $(M'C + M'B)(M'C - M'B) = \lambda(b^2 - c^2)$, on trouve $M'C = \frac{\lambda(b^2 - c^2) + a^2}{2a}$, $M'B = \frac{a^2 - \lambda(b^2 - c^2)}{2a}$,

d'où aisément $\text{M'O'}=\frac{\lambda(b^2-c^2)}{2a}, \quad \text{M'H'}=\frac{(b^2-c^2)(1-\lambda)}{2a},$

et, par conséquent, $\frac{M'O'}{M'H'}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$, rapport qui ne dépend que de λ .

La perpendiculaire élevée en M', sur BC, coupcrait donc la droite d'Euler OH en un point M, bien déterminé, pour lequel $\frac{MO}{MH} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$. La position de ce point ne dépendant que de la valeur de λ , on trouverait le même résultat pour les deux autres côtés. M est donc un point de la droite d'Euler du triangle Λ BC.

Si le point M avait été déterminé par les conditions $\overline{MA}^2 - \lambda a^2 = \overline{MB}^2 - \lambda b^2 = \overline{MC}^2 - \lambda c^2$,

on aurait eu, pour sa projection M" sur BC

$$\overline{M''B^2} - \overline{M''C^2} = \lambda(b^2 - c^2)$$
:

d'où $\overline{M''B^2} - \overline{M''C^2} = \overline{M'C^2} - \overline{M'B^2}$.

Il en résulte évidemment que les points M' et M" sont isotomiques sur BC et que, par conséquent, les deux points M cherchés sont sur la droite d'Euler, symétriquement disposés par rapport à O.

Dans le cas particulier de la question proposée, $\lambda = 1$ le premier point coïncide avec l'orthocentre H; le second, est le symétrique H', de H, par rapport à O.

Nota. - Solutions diverses par MM. Govers et Davidoglou.

M. Lemoine, en nous adressant cette question, ajoutait quelques réflexions; parmi lesquelles, les suivantes:

1º Au point H, la valeur commune des quantités $\overline{AH}^2 + a^2$, $\overline{BH}^2 + b^2$, $\overline{CH}^2 + c^2$, est égale à $4R^2$.

2º Au point H', on a

 $\overline{AH'}^2 - a^2 = \overline{BH'}^2 - b^2 = \overline{CH'}^2 - c^2 = 16R^2 - 4(p^2 - 4Rr - r^2)$

(notations ordinaires).

3° Le point H' a pour coordonnées normales $\cos A - \cos B \cos C$,... Ce point est, après le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre, un des points remarquables du triangle qui se place le plus simplement; si l'on s'appuie sur sa propriété d'être le centre radical des trois circonférences A(a), B(b), C(c) étudiées par M. de Longchamps, on voit que le symbole de sa construction est op: $(4R_1+2R_2+9C_1+3C_3)$; simplicité: 18; exactitude: 13; 2 droites, 3 cercles.

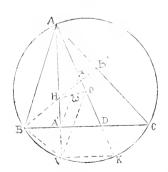
QUESTION 625

Solution par M. Gotens.

Soient H l'orthocentre d'un triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit : les droites AH et AO coupent le côté BC respectivement aux points A', D; soit α le point milieu de AD. Les trois droites telles que A' α se croisent au centre ω du cercle des neuf points.

(Droz-Farny.)

Le centre du cercle des neuf points est au milieu de la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit. Il suffit



donc de démontrer que ω est le milieu de OH. Dans le triangle rectangle AA'D, $A'\alpha = A\alpha$; donc l'angle $HA'\alpha = \alpha AA'$. Dans le triangle rectangle AVK, VO = AO; donc l'angle $A'VO = HA'\alpha$; donc $A'\alpha$ et VO sont parallèles.

Les égalités

 $\widehat{HBA'} = \widehat{A'AC} = \widehat{A'BV}$ prouvent que HA' = A'V; A' étant le milieu de HV dans le

triangle HVO; A'a. parallèle à OV, passe par le milieu de HO.

Nota. — Solutions diverses par MM. A. Champion; H. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Due; Davidoglou.

Solution par M. L'HUILLIER.

On considère le faisceau $O(AA_1A_2A_3...A_{2p}B)$ ct la transversale $AA_1A_2 \ldots A_{2p}B$. Si l'on désigne par $R_1, R_2, \ldots R_{2p}$, les rayons des (A_{2p}) cercles circonscrits, aux triangles OAA₁OAA₂ ... OAA_{2p} et par $R'_1, R'_2, \ldots R'_{2p}$ les rayons des cercles circonscrits aux triangles OBA_1 , OBA_2 ... OBA_{2p} , on a la relation

$$\frac{R_2 \dots R_{2p}}{R_1 \dots R_{2p-1}} = \frac{R'_2 \dots R'_{2p}}{R'_1 \dots R'_{2p-1}} \cdot \frac{\binom{*}{}}{\text{(J. Négrétzu.)}}$$

Le produit de deux côtés d'un triangle étant égal au diamètre multiplié par la hauteur correspondante au troisième côté, on aura en désignant par h cette dernière

et, par suite,

$$\frac{R_2\,\ldots\,R_{2p}}{R_1\,\ldots\,R_{2p-1}} = \frac{R_2'\,\ldots\,R_{2p}'}{R_1'\,\ldots\,R_{2p-1}'}.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. A. Champion et Davidoglou.

^(*) Énoncé rectifié.

Solution, par M. J.-S. Mackay, professeur à l'Université d'Édinbourg.

Soient:

I, I_1 , I_2 , I_3 le cercle inscrit et les cercles exinscrits à un triangle ABC,

Montrer que:

 I° Le triangle C_1 C_2 C_3 est semblable au triangle formé par les centres des cercles I_1 , I_2 , I_3 et le rapport de similitude de ces

triangles est $\frac{1}{2}$:

2º Le point C_0 est le point de rencontre des hauteurs du triangle C_1 , C_2 , C_3 . (E.-N. Barisien.)

Employons les notations suivantes:

I, I₁, I₂, I₃ désigneront aussi les centres des cercles inscrit et exinscrits,

D, D_1 , D_2 , D_3 , les points de contact de ces cercles avec BC,

A', B', C', les points milieux de BC, CA, AB.

On sait que A' est le point milieu de D_2D_3 , aussi bien que celui de DD_1 . On aura donc l'axe radical des cercles I_2 , I_3 passant par A' et perpendiculaire à leur ligne de centres I_2I_3 .

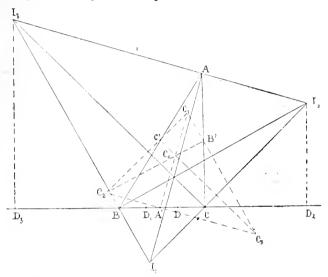
Mais l'axe radical des cercles I, I_1 passe aussi par A', et il est perpendiculaire à II_1 . Par conséquent, les axes radicaux des couples de cercles I_2 et I_3 se coupent perpendiculairement en A'.

De même pour les axes radicaux des cercles I_3 et I_1 , I et I_2 ; et pour ceux de I_1 et I_2 , I et I_3 .

Maintenant, puisque les axes radicaux de trois cercles se coupent au centre radical, on voit que les quatre centres radicaux C_0 , C_1 , C_2 , C_3 forment un groupe orthocentrique, c'est-à-

dire, que. dans le groupe, chaque point est l'orthocentre du triangle dont les trois autres sont les sommets.

Les deux quadrangles $II_1I_2I_3$ et $C_0C_1C_2C_3$ ont évidemment leurs lignes correspondantes parallèles.



Le triangle ABC et le triangle $C_1C_2C_3$ ont même cercle des neuf points, parce que A', B', C', qui sont les points milieux des côtés de ABC, sont les pieds des hauteurs de $C_1C_2C_3$. Le rayon de ce cercle est la moitié du rayon R du cercle ABC, et le cercle ABC est le cercle des neuf points du triangle $I_1I_2I_3$; ce qui établit le rapport de similitude des triangles $C_1C_2C_3$ et $I_1I_2I_3$.

Remarque. — On peut signaler quelques autres propriétés appartenant à cette figure.

Si l'on désigne par H l'orthocentre du triangle ABC, on sait que le cercle des neuf points de ABC touche les seize cercles inscrits et exinscrits aux quatre triangles ABC, HCB, CHA, BAH. Or, ce même cercle doit toucher aussi les seize cercles fournis par les triangles $C_1C_2C_3$, $C_0C_3C_2$, $C_3C_0C_1$, $C_2C_1C_0$.

Si l'on effectue les mêmes constructions sur le triangle $C_1C_2C_3$ comme on a fait sur le triangle ABC, on aura une

autre série de seize cercles touchés par le même cercle des neuf points; et ainsi de suite.

On trouvera que les triangles $C_1C_2C_3....$ successivement obtenus approchent de plus en plus d'un triangle équilatéral; par conséquent, le cercle des neuf points de ABC sera non seulement le cercle des neuf points du triangle limite, mais aussi son cercle inscrit.

La question a été traitée dans le Lady's and Gentleman's Diary (pour 1837, p. 87), recueil peu connu, même en Angleterre.

La première propriété de la question est un cas particulier d'un théorème plus général, énoncé dans les *Annales* de Gergonne, tome II, p. 93 (4811):

« Si, à un triangle quelconque T, on en circonscrit un autre, quelconque, lui aussi, T'; qu'à celui-ci, on en circonscrive un troisième T", ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de T; puis, qu'on circonscrive à T" un nouveau triangle T", dont les côtés soient respectivement parallèles à ceux de T', et ainsi de suite, les aires des triangles T, T', T", T", ... lesquels seront semblables de deux en deux, formeront une progression par quotient.»

On trouvera une démonstration de ce théorème par M. Léon Anne dans les *Nouvelles Annales*, tome III, p. 27 (1844).

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny; L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc et Davidoglou.

QUESTION 628

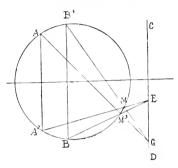
Solution par A. Droz-Farny.

On donne, sur une circonférence: 1º deux points A, B et leurs symétriques A', B' par rapport à un diamètre; 2º une droite CD perpendiculaire à ce diamètre. On joint A et B à un point quelconque M' de la circonférence; BM' rencontre CD en E; AM rencontre CD en G. Démontrer que les droites B'G, A'E se coupent sur la circonférence. '(Alfred Champion.)

B'G et A'E se coupent en M; considérons l'hexagone AA'MB'BM' dont les paires de côtés opposés se coupent AA' et BB' suivant le point infini de CD; A'M et BM' en E;

MB' et M'H en G. Ĉes points d'intersection étant en ligne droite, les six sommets de l'hexagone appartiennent à une même conique bien définie par les cinq points A, B, A', B', M'.

Remarque. — On peut remplacer la circonférence par une conique quel conque, AA', BB', CD partrois cordes paral-



lèles ou par trois droites concourantes.

Autrement (*). — B'G coupe la circonférence en M. Tirons A'M; elle coupe BM' en un point E'; nous allons montrer que E' se confond avec E. Le quadrilatère GM'ME' est évidemment inscriptible. Alors $\widehat{EGE'} = \widehat{MGE} - \widehat{MGE'} = \widehat{MGE} - \widehat{MGE} = \widehat{MGE} - \widehat{MGE} = \widehat{MGE} = \widehat{MGE} = \widehat{MGE} = \widehat{MGE}$

Ainsi GE' se confond avec GE, etc.

QUESTION 629

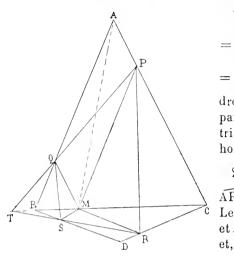
Solution, par M. DAVIDOGLOU.

Soit BAC un triangle isoscèle (AB = AC); aux points Bet C on élève aux côtés BA, CA, des perpendiculairesqui se coupent en D. Soit M un point arbitrairement choisi sur la base BC; par M, on mène des parallèles aux côtés AB, AC et aux droites BD, CD. On forme ainsi deux parallélogrammes MAPQ, MDRS. Démontrer:

1º Que PQ, RS se coupent sur BC;

2º Que les droites AM, RS, d'une part; DM, PQ, d'autre part, sont rectangulaires. (G. L.)

^(*) Cette solution est de M. Davidoglou.



4° On a $\frac{BQ}{BA} = \frac{MB}{CB}$ $= \frac{SB}{DB}$; de même, $\frac{CP}{CA}$ $= \frac{RC}{DC}$, de sorte que les droites QS et PR sont parallèles à AD. Les triangles BQS, PMR sont homothétiques, etc.;

 $2^{\circ} \frac{SM}{MR} = \frac{BM}{MC} = \frac{AP}{PM};$ $\widehat{APM} = \widehat{SMR} = \widehat{B} + \widehat{C}.$ Les deux triangles SMR et AMP sont semblables et, comme SM, MR sont. respectivement, perpen-

diculaires à MP, MQ, il en est de même de SR et AM.

Nota. — Autres solutions par MM. L'HULLIER, répétiteur au lycée de Barle-Duc, Georges Rodriguez (*), à Bogota (Colombie), Droz-Farny et Goyens. M. Goyens observe que la première partie est applicable à un triangle quelconque.

QUESTION 630 Solution, par M. L'HUILLIER.

On considère une circonférence Γ et un point A, fixe. Soit M un point mobile sur F; la tangente en M rencontre la perpendicutaire élevée au milieu de AM en un point I dont on demande le lieu géométrique. (G. L.)

De la construction proposée, il résulte que IM = IA. Le lieu cherché est donc une droite, axe radical du point A et de la circonférence Γ . Pour construire cette droite, il suffit de mener, de A, les tangentes à Γ et de prendre les milieux de ces tangentes.

Nota. - Solutions analogues par MM. DROZ-FARNY, DAVIDOGLOU, GOYENS.

^(*) M. Georges Rodriguez nous a également adressé une très bonne solution de la question 568 (question résolue dans le dernier numéro, p. 102); celte solution nous est arrivée trop tard pour la publier.

Solution, par M. A. Droz-Farny.

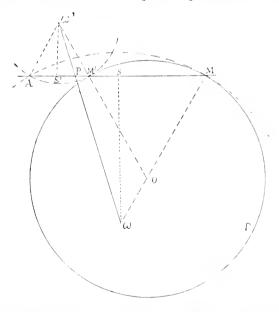
Autour du point A, on fait tourner une transversale qui coupe une circonférence Γ aux points M et M'; soient ω, ω' les centres des circonferences qui, passant par A, touchent Γ , respectivement aux points M, M'.

1º Démontrer que

arc AM + arc AM' = arc MM'.

2º Trouver le lieu du point de rencontre des droites MM', $\omega\omega'$; (G. L.)

1° Soient S et S' les points milieux des sécantes AM et AM'. Les droites OM et OM' coupent respectivement les perpen-



diculaires élevées en S et S' sur AM aux centres cherchés ω et ω' . Les triangles ωMA , $\omega M'$, $\omega M'$ étant isoscèles

semblables, il er résulte immédiatement que la figure $A\omega'O\omega$ est un parallélogramme, et par conséquent,

$$A\omega = OM' + \omega'M'$$

d'où la relation

 $\operatorname{arc} AM - \operatorname{arc} AM' = \operatorname{arc} MM'$. (*)

Pour un point A, mis à l'intérieur de Γ , on aurait arc AM + arc AM' = arc MM'.

 2^o Pour démontrer la seconde partie, observons que $\omega\omega'$ rencontrant MM' en P , on a

$$\frac{S'P}{SP} = \frac{\omega'S'}{\omega S} = \frac{AS'}{AS},$$

$$(AS'PS) = -1.$$

donc

Mais les points S et S' décrivent une circonférence Γ' admettant, avec Γ , le point A comme centre de similitude $\left(\frac{R}{R'}=\frac{2}{I}\right)$, P décrit donc la polaire de A par rapport à cette circonférence, c'est-à-dire une ligne droite perpendiculaire sur AO.

Nota. — Solutions analogues par MM. Davidoglou et L'Huillier.

QUESTIONS PROPOSÉES

673. — On donne une circonférence de cercle C et deux points a et b sur cette courbe. On mène les droites am, bm qui aboutissent au point m de C. On décrit une circonférence de cercle tangente à C et à ces droites. On prend la corde de contact de ce cercle et de ces droites. Démontrer que lorsque m décrit C cette corde de contact reste tangente à une circonférence de cercle.

(Mannheim.)

674. — Démontrer que

$$\frac{2 \sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{2 \cos \alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$
(E.-N. Barisien.)

^(*) On peut toujours écrire la relation proposée sous une forme unique; il y a lieu seulement, ici, comme dans toutes les relations de la géométrie, d'affecter les segments considérés d'un signe. Dans le cas présent, on peut faire cette convention que arc AM représente une quantité positive quand le mobile allant de A vers M se meut de la gauche vers la droite de l'observateur placé au centre de l'arc, perpendiculairement à son plan. Avec cette convention, la relation arc AM + arc AM' = arc M'M est toujours vérifiée.

(G. L.)

675. — L'équation du 4e degré

$$[b^2z^2 - a^2]^2 - 4ab(bz^3 - a)(az - b) = 0$$

est décomposable en un produit de deux facteurs du second degré. Des racines de cette équation, deux sont toujours réelles; les deux autres, toujours imaginaires.

(E.-N. Barisien.)

- 676. Trois segmeuts de droites, AB, A'B', A"B", sont situés sur un même plan. En général, il existe sur le plan de la figure un point P tel que les trois triangles PAB, PA'B', PA"B" peuvent être projetés sur un même plan suivant trois triangles directement semblables.

 (G. Tarry.)
- 677. La somme des carrés des distances des sommets d'un triangle équilatéral à une droite quelconque située sur le plan de la figure est égale à trois fois le carré de la distance du centre de gravité du triangle à cette droite augmenté d'une quantité constante.

En déduire que tous les triangles équilatéraux, situés sur un même plan, se projettent sur un plan donué suivant des triangles équibrocardiens.

(G. Tarry.)

678. Étant donnée une ellipse E, on projette le centre O de E en P et Q sur la tangente et sur la normale tracées en un point M de E: on prolonge le rayon OM de MM'=OM.

Montrer que les quatre droites suivantes:

1º La polaire du point P par rapport à E;

2º La polaire du point Q par rapport à E;

3º La droite menée par M' parallèlement à la tangente en M;

 $4^{\rm o}$ La parallèle à $\,$ OM $\,$ menée par le pôle de la corde normale en $\,$ M ;

Concourent en un même point. (E.-N. Barisien.)

679. — On donne, dans un cercle O, deux diamètres rectangulaires AA' et BB', et un point P sur BB' [B entre B' et P]. Sur B'P comme diamètre on décrit un demi-cercle qui couper AA' en P'. Par P et P' on mène des parallèles à BA qui coupent la tangente en A, au cercle, respectivement en P_1 et P_1' . Soient Δ et Δ' les parallèles à AA' menées respectivement par P_1 et P_1' ; II un point variable de Δ et enfin E le point d'intersection de AD avec Δ' .

Le lieu du point M d'intersection des droites P'II, OE est une droite. (Davidoglou.)

680. — On considère, dans un cercle O, un diamètre fixe AB. Un point variable M parcourt la circonférence de ce cercle. Soit M_1 un point de AB, situé entre A et B et tel que $AM_1 = AM$. Si M_2 est l'isotomique de M_1 , sur AB, la perpendiculaire au milieu μ de AM_2 coupe BM en P.

Le lieu du point Q d'intersection de PO et AM est un cercle.

(Davidoglou.)

681. — Par le sommet O, d'un rectangle OABC, on mène une droite variable Δ qui coupe la diagonale AC en P et le côté AB en P_1 .

Le lieu du point Q, intersection des parallèles à AB et BC, menées respectivement par P et P₁, est une hyperbole.

(Davidoglou.)

682. — Le cercle inscrit ω dans un triangle ABC touche les côtés aux points D_1 , D_2 , D_3 . Par les points H_1 , H_2 , H_3 où les perpendiculaires abaissées de l'orthocentre H sur ωD_1 , ωD_2 , ωD_3 coupent respectivement ωD_1 , ωD_2 , ωD_3 on mè ne des parallèles H_1H_1' , H_2H_2' , H_3H_3' à $O\omega$ (O étant le centre du cercle circonscrit) et qui rencontrent les médiatrices correspondantes aux points H_1' , H_2' , H_3' .

Les perpendiculaires menées, par ces points, à ces mêmes médiatrices, concourent en un même point. (Davidoglou.)

ERRATUM ET RECTIFICATION

Page 167, 1. 7 (en remontant), au lieu de AC, AB, il faut AB, AC.

La question 551 n'a pas été résolue jusqu'ici et cette solution, comme l'auteur nous l'a fait savoir, paraît offrir plus de difficulté qu'il ne l'avait d'abord supposé. M. Lemoine nous prie d'en prévenir les lecteurs du Journal pour qu'ils ne perdent pas leur temps à une recherche probablement pénible.

Le Directeur Gérant, G. DE LONGCHAMPS

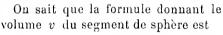
SUR LE VOLUME DU SEGMENT DE SPHÈRE

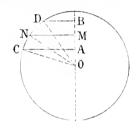
Par M. Ernest Lebon, professeur au lycée Charlemagne.

I

Trouver la formule donnant le volume d'un segment de sphère en fonction de sa hauteur et du rayon du cercle équidistant de ses bases.

Sbient AC ou r et BD ou r' les rayons des cercles bases d'un segment de sphère de centre O, de rayon R, AB ou h la hauteur du segment, MN ou p le rayon du cercle équidistant des bases.





(1)
$$v = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h \left(r^2 + r'^2\right).$$

Or, on a successivement

$$r^{2} = R^{2} - \overline{OA}^{2}$$

$$= \rho^{2} + \overline{OM}^{2} - \overline{OA}^{2}$$

$$= \rho^{2} + (OM + OA)(OM - OA)$$

$$= \rho^{2} + \left(2.OM - \frac{h}{2}\right)\frac{h}{2}$$

$$= \rho^{2} + OM.h - \frac{h^{2}}{4}.$$

$$r^{2} = R^{2} - \overline{OB}^{2}$$

$$= \rho^{2} + \overline{OM}^{2} - \overline{OB}^{2}$$

De même,

$$r^{2} = R^{2} - \overline{OB}^{2}$$

$$= \rho^{2} + O\overline{M}^{2} - \overline{OB}^{2}$$

$$= \rho^{2} - (OB + OM) (OB - OM)$$

$$= \rho^{2} - \left(2.OM + \frac{h}{2}\right) \frac{h}{2}$$

$$= \rho^{2} - OM.h - \frac{h^{2}}{4}.$$

On en conclut que

$$r^2 + r'^2 = 2 \xi^2 - \frac{h^2}{2}$$

Remplaçant, dans la formule (1), $r^2 + r'^2$ par cette valeur, on obtient, pour la formule cherchée,

(2)
$$v = \pi h \left(\varepsilon^2 - \frac{h^2}{12} \right).$$

Comme le volume d'un segment de sphère ne dépend que de sa hauteur et du rayon de sa section moyenne, on peut dire que

Deux plans parallèles à un cercle commun à plusieurs sphères et équidistants de ce cercle déterminent dans les sphères qu'ils coupent des segments équivalents (*).

NOTE DE GÉOMÉTRIE

par M. Droz-Farny, professeur au lycée de Porrentruy.

Dans Casey « A Sequel to Euclid », book VI, page 113, on trouve le théorème suivant qui mériterait d'être plus connu:

La différence des carrés des tangentes que l'on peut mener d'un point à deux circonférences données est égale au double produit de la distance du point à l'axe radical des deux circonférences par la distance de leurs centres.

La démonstration en est très aisée; ce théorème fournit comme corollaires la plupart des théorèmes cités par Chasles dans le chapitre sur les axes radicaux. (Géométrie supérieure.)

Supposons le point P sur une des circonférences, la tangente correspondante deviendra nulle, d'où:

Corollaire 1. — Le carré de la tangente que l'on peut mener d'un point d'une circonférence à une seconde circonférence est égal au double produit de la distance de ce point à l'axe radical par la distance des deux centres.

Supposons trois cercles O, O', O" appartenant à un même faisceau, P un point quelconque pris sur O et X la dis-

^(*) Il existe une autre formule du même genre dite Formule prismoïdale à deux termes, c'est la formule de Kinkelin, donnée par ce géomètre dans le tome XXXIX des Gruneri's Archiv. (Voir l'Intermédiaire des Mathématiciens, n° d'octobre 1895, p. 388.)

G. L.

tance de P à l'axe radical commun. On aura

$$\begin{aligned} \overline{T'^2} &= 2X.00' \\ \overline{T''^2} &= 2X.00'' \\ \overline{\overline{T''^2}} &= \frac{00'}{00''} \end{aligned}$$

par division

Corollaire 2. — Les tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque d'une circonférence à deux circonférences appartenant avec la première à un même faisceau sont entre elles dans un rapport donné.

La réciproque est évidemment valable.

Corollaire 3. — Le lieu des points d'où l'on peut mener à deux circonférences des tangentes qui sont entre elles dans un rapport donné est une circonférences passant par les points de coupe des deux circonférences données.

(Application au cercle de similitude de deux circonférences.) Supposons que le cercle du corollaire 1, auquel on mène la tangente devienne un cercle point, on obtient:

Corollaire 4. — Un point et une circonférence sont donnés; le carré de la droite menée du point O' à un point quelconque de la circonférence O est à la distance de P à l'axe radical de O' et O dans un rapport donné.

On a
$$\frac{\overline{O'P}^2}{X} = 200'.$$

Ce corollaire fournit une solution immédiate du problème 632 (*), proposé par M. de Longchamps.

On considère une circonférence Γ et un point A. Démontrer que, à ce point A, correspond une droite α telle que $\overline{MA^2}$

le rapport $\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MH}}$ reste constant, M désignant un point quelconque de Γ , MH étant la distance de M à la droite α .

Le cercle Γ et le point H, celui-ci considéré comme un des points limites, déterminent un faisceau de cercles; l'axe radical sera la droite α cherchée.

Le corollaire 2 donnerait lieu aussi à uneremar que analogue, en supposant qu'un des deux cercles devienne un des points limites.

^(*) Résolu page 257.

Si les deux cercles coïncident avec les points limites, on obtient le théorème d'Apollonius.

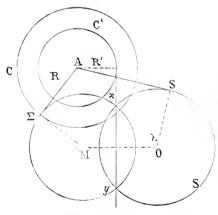
Pour terminer, je vais appliquer le théorème qui fait l'objet de cette note à la résolution de la question de mathématiques élémentaires proposée au concours d'agrégation de 1893. J'obtiendrai ainsi une solution beaucoup plus simple que toutes celles qui ont été publiées.

Étant donnés deux cercles C et C_1 qui ont même centre A et un troisième cercle S dont le centre est O, on considère les cercles Σ orthogonaux à C et tels que l'axe radical de chacun d'eux et du cercle S touche le cercle S_1 .

1º Démontrer que le lieu des centres des cercles Σ est un cercle S_1 .

(Pour abréger le langage, nous dirons que S₁ correspond au cercle S.)

2º On suppose que les deux cercles C et C₁ sont confondus et l'on propose d'étudier dans cette hypothèse la position relative des cercles S et S₁ quand on fait varier le rayon du



cercle S, le cercle C et le centre O du cercle S restant fixes.

Soient x et y les points d'intersection des circonférences Σ et S, M le centre de Σ , λ le rayon de S et R et R' les rayons des cercles C et C'; appelons enfin $A\Sigma$ et AS les tangentes menées de A aux circonférences Σ et S; la distance de A à l'axe

radical xy étant R', on a immédiatement

d'où

$$\pm (\overline{AS}^2 - \overline{A\Sigma}^2) = 2R'.MO,$$
 $MO = \frac{\pm (\overline{AS}^2 \pm R^2)}{2R'} = \text{constante};$

le lieu du centre de Σ est un cercle S' concentrique à S.

En représentant la distance AO par d, on a

$$MO = \pm \left(\frac{d^2 - \lambda^2 - R^2}{2R'}\right).$$

Un cas intéressant est le suivant :

Supposons R = o, alors que le cercle Σ passe par A; supposons en outre que les cercles C' et S soient orthogonaux, on aura

$$d^2 - \lambda^2 = \overline{R'^2},$$

et par conséquent, la formule précédente devient

$$MO = \frac{R'^2}{2R'} = \frac{R'}{2}.$$

Théorème. — Deux circonférences orthogonales de centres O et O', de rayous R et R', sont données; une tangente quelconque $a\cdot O$ coupe O' en x et y. Le lieu géométrique du centre de la circonférence circonscrite au triangle Oxy est une circonférence concentrique a O' et de rayon $\frac{R'}{2}$.

Si les cercles C et C' sont confondus, la formule devient

$$MO = \pm \frac{d^2 - \lambda^2 - R^2}{2R}.$$

Cette formule donne lieu à une discussion très facile.

EXERCICES DIVERS

Par M. Aug. Boutin.

409. — Vérifier les identités :

$$\frac{2^{4n-2}}{(4n)!} = \frac{1}{(4n)!} + \frac{1}{(4n-2)! \cdot 2!} + \frac{1}{(4n-4)! \cdot 4!} + \dots + \frac{1}{(2n+2)! \cdot (2n-2)!} + \frac{\frac{1}{2}}{(2n)! \cdot (2n)!};$$

$$\frac{2^{4n-2}}{(4n)!} = \frac{1}{(4n-1)! \cdot 1!} + \frac{1}{(4n-3)! \cdot 3!} + \frac{1}{(4n-5)! \cdot 5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)! \cdot (2n+1)!};$$

$$\frac{2^{4n}}{(4n+2)!} = \frac{1}{(4n+2)!} + \frac{1}{(4n)! \cdot 2!} + \frac{1}{(4n-2)! \cdot 4!} + \dots + \frac{1}{(2n+2)! \cdot (2n)!};$$

$$\frac{2^{4n}}{(4n+2)!} = \frac{1}{(4n+1)! \cdot 1!} + \frac{1}{(4n-1)! \cdot 3!} + \frac{1}{(4n-3)! \cdot 5!} + \dots + \frac{\frac{1}{2}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)!};$$

$$\frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!} = \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{2! \cdot (2n-3)!} + \dots + \frac{1}{(2n-4)! \cdot 3!} + \frac{1}{(2n-2)! \cdot 1!};$$

$$\frac{\pm 1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \frac{1}{(2n+1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot (2n)} + \frac{1}{(2n-2) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot (2n-2) \cdot 2};$$

$$+ \frac{1}{(2n-3) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot (2n-4) \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{(2n-5) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot (2n-6) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$$

$$\dots = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot (2n-2)} \pm \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot (2n)}.$$

410. - Vérifier l'identité:

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7}.$$

411. — Si on pose

$$x + \frac{1}{x} = z_1 = z, \quad x^n + \frac{1}{x^n} = z_n,$$

vérifier que l'on a :

$$z_1 + 2z_2 + 3z_3 + \dots + nz_n = \frac{nz_{n+1} - (n+1)z_n + 2}{z_{n+2}}$$

412. — Dans quels cas, si, à un carré, on ajoute l'entier n, la somme est-elle un triangulaire?

L'équation indéterminée

$$\frac{x(x+1)}{2} = y^2 + n,$$

peut être résolue eu nombres entiers pour les valeurs suivantes de n.
1.2 3.5.6.9.10.11.12.14.15.17.19.20.24...

Quand elle a une solution, elle en a une infinité.

Les valeurs de n pour lesquelles la même équation n'est pas résoluble sont:

En général, le problème est impossible lorsque 8n + 1, étant décomposé en ses facteurs premiers, un ou plusieurs de ces facteurs sont de la forme $8k \pm 3$, avec un exposant impair.

413. — Dans quels cas, si, à un triangulaire, on ajoute l'entier n, la somme est-elle un carré?

Quand le problème est possible, il admet, comme le précédent, une infinité de solutions. Il n'y a aucune solution pour les valeurs suivantes de n: 2.5.7.11.12.14.17.18.20.23.27.29.31.32.37 ...

et, en général, pour toutes les valeurs de n telles que 8n - 1 étant décomposé en ses facteurs premiers, un ou plusieurs de ces facteurs sont de la forme $8k \pm 3$, affectés d'un exposant impair.

CORRESPONDANCE

(Solution de la question 616.)

Extrait d'une lettre de M. G. TARRY:

... La proposition 616 (*) est des plus simples à établir.

La première partie est évidente.

La réciproque repose sur ce lemme:

Si deux figures F, F' inversement (ou symétriquement) égales, ont un point double O, elles sont symétriques par rapport à une droite qui passe par le point double.

En esfet, soient A, A' deux points homologues.

Construisons la figure F_1 symétrique de la figure F_2 , par rapport à la bissectrice Ox de l'angle AOA'.

Les points O, A' de la figure F_1 ont pour homologues les points O, A dans la figure F, et par suite, les points O et A' dans la figure F'; donc les figures égales F_1 et F', qui ont deux points doubles, O et A', se confondent, ce qui démontre le lemme.

Cela posé, soient F_1 , F_2 , F_3 trois figures directement égales; S_1 , S_2 , S_3 les centres de rotation (ou points doubles) de F_2 et F_3 , F_3 et F_4 , F_1 et F_2 .

Appelons F_0 la figure symétrique de F_1 , par rapport à la droite S_aS_a .

Les figures inversement égales Fo et Fo ont pour point

^(*) Nous n'avons pas reçu de solution pour la question 616 posée par M. Tarry (Journal, p. 71).

double S_z et sont par conséquent symétriques par rapport à une droite $S_z x$.

Pareillement les figures Fo et Fo sont symétriques par

rapport à une droite Say.

Le point d'intersection des droites S_2x et S_3y , étant évidemment un point double des figures F_2 et F_3 , n'est autre que S_1 .

Donc la figure F_0 est symétrique aux figures F_1 , F_2 , F_3 par rapport aux droites S_2S_3 , S_3S_1 , S_1S_2 . c. Q. F. D.

Comme vous l'aviez bien prévu, l'intérêt de la question réside dans la méthode qui est indiquée; c'est la plus naturelle et la plus simple.

Des considérations aussi simples et aussi naturelles conduisent à la loi du mouvement hélicoïdal.

... Les propriétés du carré magique de 3, parues dans le n° de mars (incomplètement présentées d'ailleurs), peuvent être étendues considérablement.

La généralisation de ces propriétés m'a permis de construire des carrés magiques d'une espèce particulière, que j'appelle cabalistiques.

Tout carré dont le module est un nombre carré impair quelconque n^2 peut être construit de telle manière que le carré soit magique aux deux premiers degrés.

Les deux constantes se trouvent non seulement dans les n^2 rangées horizontales, les n^2 colonnes verticales, 2n lignes diagonales, mais encore dans les n^2 carrés mineurs de module n dans lesquels est décomposé le carré de module n^2 .

De plus, si le nombre impair n ne renferme ni le facteur 3, ni le facteur 5, les n^2 carrés mineurs sont diaboliques.

Le plus petit carré jouissant de ces propriétés a pour module $7^2 = 49$.

Je viens de construire le carré cabalistique de module 49 et je compte le présenter au Congrès de Bordeaux (*).

^(*) Cette Note, depuis que la lettre que M. Tarry nous a écrite, a été présentée au Congrès de Bordeaux, sous le titre Sur la théorie des carrés magiques à plusieurs degrés, dans la séance du 6 août dernier.

Cette Note est accompagnée du curré cabalistique de module 49, le plus petit des carrés de l'espèce qui a tous ses carrés mineurs diaboliques.

Je sentais bien que dans cette petite propriété du carré magique de 3 il y avait en germe un théorème sur les carrés magiques à plusieurs degrés.

Alger; juillet 1895.

Extrait d'une lettre de M. Bernès.

Voici quelques remarques inspirées par les derniers numéros du J . \acute{E} .

1º La démonstration de la relation
$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B + C)} = \frac{b - c}{b + c},$$

donnée par M. Brand dans le numéro de juillet, est fort bonne. Elle peut être présentée et établie plus simplement comme il suit:

Sur AC portons AD et AE égaux à AB, et soit F la rencontre de BE et de la parallèle menée par C à BD. L'angle FCE, complémentaire de E ou $\frac{A}{2}$, est égal à $\frac{1}{2}(B+C)$.

et l'angle FCB est égal à
$$\frac{1}{2}$$
 (B + C) - C ou $\frac{1}{2}$ (B - C).

On a done FB = FC.
$$tg\frac{1}{2}(B-C)$$
 E

FE = FC. $tg\frac{1}{2}(B+C)$.

Et la proportion $\frac{FB}{FE} = \frac{CD}{CE}$ donne

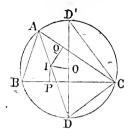
$$\frac{tg\frac{1}{2}(B-C)}{tg\frac{1}{2}(B+C)} = \frac{b-c}{b+c}.$$

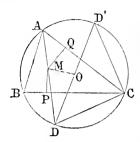
F

Remarque. — Les triangles BDC, BEC donnent les formules utiles :

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{1}{2} (\mathrm{B}-\mathrm{C})}{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}}, \qquad \frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2} (\mathrm{B}-\mathrm{C})}{\sin\frac{\mathrm{A}}{2}}.$$

La dernière, qu'on trouve dans toutes les trigonométries, est la question 607 (E.-N. Barisien).





 2° La relation $IO^2 = R^2 - 2Rr$ ou IA.ID = -2Rr, dont le numéro de septembre contient une démonstration, résulte plus simplement de la similitude des deux triangles rectangles AIQ, D'DC; où D'D est le diamètre perpendiculaire à BC, et Q la projection de I sur AC.

Elle peut être généralisée: Si sur une corde quelconque AD, tracée par A, on porte DM = DC, on aura $MO^2 = R^2 \mp 2R$. MQ selon le sens DM et celui de IQ.

D'où ce théorème:

Le lieu des points M définis comme il vient d'être dit est formé de deux cercles, l'un décrit sur $H_{\scriptscriptstyle B}$ et l'autre sur $I_{\scriptscriptstyle A}I_{\scriptscriptstyle C}$ comme diamètres.

Et encore: Si sur une corde quelconque AD tracée par A on porte DM tel que $\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}}$ (P, Q projection de M sur BC, AC), on aura $\mathrm{MO^2} = \mathrm{R^2} \mp 2\mathrm{RMP}$ selon les sens de DM, MP, MQ.

D'où ce théorème:

Le lieu des points M définis comme il vient d'être dit est formé de deux cercles, l'un décrit sur II_A et l'autre sur I_BI_C comme diamètres.

La recherche directe de chacon de ces lieux donne une équation du quatrième degré qu'on peut s'exercer à décomposer.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons de cosmographie, par MM. TISSERAND, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire de Paris et H. Andover (*), maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris.

Leçons d'arithmétique théorique et pratique par Jules TANNERY, sousdirecteur des études scientifiques à l'École Normale supérieure.

Ces deux volumes qui viennent de paraître à la librairie Colin, 5, rue de Mézières, font partie d'un cours complet de mathématiques élémentaires qui se publie sous la direction de M. Darboux, doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

Des livres, signés de tels noms, se recommandent d'eux-mêmes; nous ne saurions les louer sans inconséquence et notre rôle doit se borner à

signaler leur apparition aux lecteurs du Journal.

On a souvent discuté sur ce point, qui n'est pas sans intérêt, « Est-il préférable qu'un livre pédagogique, traitant de sujets élémentaires, un livre visant l'instruction des débutants, soit écrit par l'homme qui est chargé de cette instruction, par le professeur de la classe? Vaut-il mieux, au contraire, qu'il sorte de la plume d'un savant, au sens le plus élevé du mot, d'un homme habitué à frequenter la science dans ses plus hautes conceptions, mais n'ayant pas professé, depuis longtemps au moins, devant la jeunesse à laquelle le livre est destiné, les matières qui composent son ouvrage? C'est le cas, je crois, des auteurs du cours de Mathématiques élémentaires; de M. Tisserand notamment, qui, avant d'écrire ce modeste livre, a publié une Mécanique céleste, œuvre magistrale, dans laquelle il a su joindre, à l'érudition la plus complète du sujet qu'il traitait, beaucoup d'ordre et une grande clarté d'exposition, mais qui n'a cessé, depuis sa sortie de l'École Normale, d'appartenir à l'enseignement supérieur. Dans cette controverse il y a beaucoup à dire, pour défendre l'une ou l'autre opinion et, certes, dans cette controverse, les arguments ne font pas défaut pour conclure, avec toute l'apparence de la vérité, dans un sens ou dans l'autre. Au fond les uns et les autres ont également raison. En principe, l'homme qui est rompu aux besoins de l'enseignement, placé par métier au milieu de la jeunesse, paraît a priori mieux désigné pour rédiger, dans

^(*) Puisque le nom de M. Audoyer tombe iei sous notre plume, nous signalerons à l'attention des professeurs et à celle des élèves qui commencent l'étude théorique de l'arithmétique le Cours d'arithmétique qu'il vient de publier à la librairie Belin. Ce petit livre, que nous avous lu avec un intérêt particulier, bieu qu'il n'ait pas été soumis à notre analyse, est rédigé avec une clarté parfaite, une méthode et un ordre remarquables. Je ne saurais trop louer l'auteur d'avoir résolument adopté l'usage systématique des lettres pour représenter les nombres. Il a voulu, et avec raison, battre en brèche un vieux préjugé qui ne tardera pas, je l'espère, à disparaître et cette écriture symbolique évitera à nos futurs jeunes écoliers bien des ennuis qui n'ont pas été, hélas! suffisamment épargnés à leurs anciens.

l'esprit qui convientaux élèves, esprit qu'il est, par sa situation, plus à même de juger, l'ouvrage qui leur est destiné. Mais rien n'empêche pourtant que ce même ouvrage ne soit tout aussi bien composé par des maîtres de la science, bien qu'ils vivent loin des lecteurs auxquels ils s'adressent, et que le livre ainsi composé ne possède, par surcroit, ce souffle vivifiant qui descend de lui-même des sommets de la science et donne aux livres dans lesquels il circule une valeur particulière. Il est permis de croire que le souffle dont nous parlons, en pénétrant l'âme de nos élèves, est singulièrement propre à les rendre meilleurs, en leur inspirant, avec l'idée, encore bien confuse chez eux, de la science et de l'amour qu'on lui doit, la raison supérieure des choses. Si nous nous étions jamais permis d'en douter, les deux livres que nous venons de lire et, aussi, celui que nous signalons dans la note placée au bas de la page précédente, nous auraient clairement montré notre erreur.

Traité d'Aritmétique, par C. A. LAISANT et E. LEMOINE, Directeurs de l'Intermédiaire des matématiciens; suivi de Notes sur l'ortografie simplifiée, par P. Malvezin, Directeur de la Société filologique française. (Paris, Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grauds-Augustins.)

La préface de l'ouvrage que nos amis MM. Laisant et Lemoine viennent de faire paraître dit nettement à quelle idée principale ils ont obéi en écri-

vant ce traité d'arithmétique.

«Le petit traité qu'on va lire, dit la préface, a la prétension de présenter, sous une forme à la fois simple et rigoureuse, les éléments du calcul numérique et de la théorie des nombres. Nous sommes convaincus, contrairement à l'opinion généralement reçue, qu'il n'est pas impossible de raisoner juste en enseignant les principes des sciences et qu'il vaut toujours mieux dire aux enfants les raisons exactes des choses, que de leur cacher ou de leur dissimuler ce qu'on est convenu d'appeler des dificultés. Ces dificultés, d'ailleurs, sont plus aparentes que réèles et èles n'ont existé, la plupart du temps, que parce que les persones chargées d'enseigner l'aritmétique n'ont pas toujours été bien préparées à cet enseignement par une étude sufisamment aprofondie de la filosofie de la science »

MM. Laisant et Lemoine ont formulé là un excellent programme, mais, je crois que tout le monde partage, sur ce point, leur opinion. Pourtant, qu'ils me permettent de le dire, ils me paraissent bien sévères dans le jugement qu'ils portent ainsi sur les professeurs chargés de l'enseignement de l'arithmétique. J'espère qu'ils ne m'en voudront pas de prendre la défense de ceux-ci contre le reproche qu'ils leur adressent et qui me paraît immérité. Peut-ètre ce reproche a-t-il eu autrefois quelque raison d'ètre, mais, aujourd'hui, je puis le leur attirmer, il n'est nullement justifié. Il y a longtemps, par exemple, qu'on a abandonné cette définition de la multiplication qu'ils citent dans leur préface et qu'on enseigne celle, parfaitement nette, qu'ils ont eux-mèmes adoptée (*). Quant à la définition du nombre (**),

^(*) Dans l'arithmétique de M. Andover, signalée plus haut, je lis: multiplier un nombre a par un nombre b, c'est additionner b nombres égaux à a. Il me semble qu'on ne peut micux dire, en moins de mots, pour définir la multiplication des nombres entiers.

^(**) On appelle NOMBRE une locution et un signe qui servent à désigner avec précision une quantité et toutes celles qui sont égales, de manière à les distinguer nettement de toutes celles qui sont plus grandes ou plus petites.

définition quelque peu métaphysique, reposant sur l'idée première qui correspond au mot quantité, et sur les notions des quantités égales ou inégales, je me suis demandé s'il n'était pas préférable, contrairement à ce que pensent MM. Laisant et Lemoine, de se horner, sur ce point délicat, à la bonne et vieille habitude de l'enseignement. Croient-ils que le très jeune étudiant qui abor-le l'étude de l'arithmétique théorique, celle où l'on ne se borne plus à la manipulation des opérations, mais où l'on s'efforce d'expliquer nettement les choses et les mots, croient-ils vraiment que cet enfant comprendra clairement cette définition du nombre ? N'est-il pas plus sage d'élever, peu è peu, l'esprit à l'idée générale des grandeurs en procédant, comme on le fait ordinairement, par lui inculquer l'idée du nombre entier, puis celle du nombre fractionnaire pour aboutir enfin à la notiou du nombre incommensurable?

Je tenais à dire ce qui précède; mais, ces réserves faites, je reconnais que le traité d'arithmétique de MM. Laisant et Lemoine est un livre qui appelle l'attention et qui seralu avec d'autant plus d'intéret qu'il sort très sensiblement du moule ordinaire, je veux dire du moule universitaire; il est suggestif. Je dois ajouter que sa rédaction est parfaite et qu'il est

admirablement imprimé.

Commel e prouvent le titre et la citation que nous avons reproduits plus haut, ce traité est écrit avec ce qu'on appelle la nouvelle orthographe. Cette réforme, je le sais, a dans MM. Laisant et Lemoine de chauds partisans. Pour moi, très incompétent d'ailleurs en la matière, je n'attache pas, s'il faut dire ici mon avis, grand intérêt à la chose; mais il m'atoujours semblé que la réforme, telle qu'elle était proposée, ne retranchait qu'un très petit nombre des difficultés inhérentes à notre orthographe et je crois qu'il valait mieux, soit laisser les choses en l'état, soit proposer la révolution complète, celle qui vraiment simplifiera nos règles d'orthographe, en édictant des lois nouvelles, trauchant vigoureusement et définitivement dans le vif (*).

Pour compléter ce bulletin bibliographique, un peu chargé naturellement au début d'une année scolaire, nous avons encore à signaler à l'attention de nos lecteurs plusieurs publications éditées par la société d'éditions

scientifiques, 4, rue Antoine-Dubois.

D'abord les Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'école spéciale militaire de Saint-Cyr. par M. A. Tournois, ancien élève de l'Ecole Normale supérieure, professeur agrègé de mathématiques au lycée Lakanal (Cours

de Saint-Cyr).

Dans cet ouvrage sont développées les parties du cours de mathématiques spéciales qui ont été introduites, il y a quelques années, à tort, je crois, dans le programme des examens de Saint-Cyr. Un pareil livre ne peut évidemment comporter, de la part de celui qui l'écrit, qu'une part très faible d'originalité. Il doit s'efforcer d'ètre clair et s'imposer, comme une règle inflexible, de rester serupuleusement dans les limites du programme qu'il développe. Il m'a semblé que ces deux conditions essentielles s'appliquaient bieu au livre de M. Tournois. Je me permets de lui sigualer, quand il corrigera les épreuves de la deuxième édition, de trop nombreuses

^(*) J'ai communiqué à M. Lemoine les observations qui précèdent; il y a répondu dans une lettre qui sera publiée dans le numéro prochain.

fautes typographiques, en dehors de celles qui sont indiqués en dernière page. Qu'il relise, par exemple, la seconde moitié de la page 15 et celle de la page 45 et il sera certainement de mon avis.

Enfin, je dois encore signaler, à cette même librairie, les Manuels du baccalauréat écrits par M. L. Gérard, docteur ès sciences, professeur au

lycée de Lyon.

Ces manuels visent la préparation aux baccalauréats de l'enseignement secondaire: le baccalauréat classique (1^{re} partie, 2° partie, 2° série) et le baccalauréat moderne (1^{re} partie, 2° partie, 2° et 3° séries).

Ils sont rédigés, comme nous l'apprend le prospectus qui les accompagne, par les meilleurs professeurs des lycées de Paris et des départe-

ments. Leur succès ne saurait done être douteux.

Il y a longtemps qu'on a dit du mal des manuels; māis ils ont la vie dure, probablement parce qu'ils répondent à un véritable besoin dans la préparation des examens, et plus particulièrement peut-être, pour des raisons inutiles à approfondir, dans celle des baccalauréats, qu'ils soient classiques ou modernes, d'une 1re partie ou d'une 2e partie, d'une série, ou d'une autre. Ecrire un bon manuel n'est pas une chose aussi facile qu'on serait tenté de le croire. Il y faut beaucoup d'ordre; il faut surtout posséder à fond l'art d'éliminer toutes les choses qui ne visent pas directement l'examen, aux exigences duquel le manuel se propose de répondre.

Deux volumes, à notre connaissance, ont paru jusqu'ici : la Géométrie et la Trigonométrie. Il y a beaucoup de choses dans ces deux volumes, bien qu'ils soient de petites dimensions, comme il convient à tout bon manuel, qui doit tenir facilement dans la main, et même dans la poche du candidat. Je signalerai, comme m'ayant particulièrement frappé, la démonstration du théorème de Pythagore, que j'ai lue dans le premier; elle m'a beaucoup plu par sa simplicité. Mais je ne sais pas si la définition, donnée dans ce livre, de la longueur d'un arc de cercle, définition qui repose sur un axiome discutable, sera bien goûtée.

G. L.

BACCALAURÉATS

(SESSION D'AVRIL 1895)

Académie d'Aix.

BACCALAURÉAT COMPLET ET CLASSIQUE

Un angle d'un triangle étant donné, on suppose constante la somme des deux côtés adjacents, et l'on demande les maxima ou minima de l'aire du triangle, du troisième côté, des autres angles, des hauteurs du triangle, du ravon de chaque cercle, circonscrit, inscrit et exinserit.

1º Comment faudrait-il établir le calendrier si la durée de l'année était

en jours de 365 j. 19?

2º Problème. Dans un plan vertical, une barre pesante et homogène AB est mobile autour de son extrémité A qui est fixe; l'extrémité B de la barre s'appuie contre une barre verticale fixe XY. La barre AB pèse 10 kilog., sa longueur est de 2 mètres et la distance du point A à la verticale XY est égale à 1 mètre.

On demande de calculer en kilogrammes les pressions que la barre AB exerce sur le point A et sur la verticale XY.

Académie d'Alger.

BACCALAUBÉAT COMPLET

I. - Établir la formule qui donne la surface de la zone.

II. — Problème. A quelle hauteur faudra-t-il s'élever au-dessus de la surface de la terre supposée sphérique pour apercevoir la centième partie de la surface totale?

Quel angle ferait avec la verticale la tangente que l'on mènerait du point

trouvé à la surface de la terre?

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. Questions au choix: Io Connaissant la trace horizontale d'un plan et

l'angle de ses deux traces, trouver la trace verticale.

2º Étant donnés un triangle, dans le plan horizontal, et un point quelconque dans l'espace, construire une sphère passant par ce point et tangente aux trois côtés du triangle.

3° Étant donnés deux points sur la ligne de terre, un point dans le plan vertical et un point dans le plan horizontal, déterminer la sphère passant

par les quatre points.

II. — Problème obligatoire. Étant donnée une demi-circonférence AMB, comment faut-il mener la corde AM pour qu'en faisant tourner la figure autour de AB les deux portions du demi-cercle déterminées par cette corde engendrent des volumes égaux?

Académie de Besançon.

On donne un demi-cercle ayant pour diamètre AB, et on considère une tangente AD à l'extrémité A de ce diamètre. On demande de déterminer un point C sur ce demi-cercle, de telle sorte que, si on mène la tangente en C au demi-cercle jusqu'à sa rencontre en D avec la tangente AD, la somme des surfaces engendrées par les droites AD et CD tournant autour de AB soit à la surface engendrée par l'arc AC tournant autour de la même droite dans un rapport donné m.—Diseuter.

Académie de Bordeaux.

BACCALAURÉAT COMPLET

 1° Étant donnée une progression géométrique décroissante dont le premier terme est a et dont la raison est représentée par q, on fait les sommes

 S_1, S_2, S_3, \ldots , de *n* termes consécutifs, S_1 commencant au premier terme; S_2 au deuxième terme, etc...

a) Trouver l'expression de S_1 , S_2 , ...

b) Calculer $S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n$; cas de $n = \infty$.

2º Etant donné un cercle de centre O, de rayon R, mener, par un point extérieur A, une sécante MN telle que le cercle décrit sur MN comme diamètre soit tangent à la droite AO.

OUESTION 650

Solution par M. A. Droz-Farny.

1º Dans tout triangle, les perpendiculaires élevées, par le centre de gravité, aux trois médianes, coupent les côtés correspondants en trois points en ligne droite;

2º Si les perpendiculaires élevées par le centre de gravité aux médianes BM', CM" coupent respectivement AC, AB en F, F', la droite FF' coupe BC en un point A" situé sur une droite avec les point analogues B", C". (A. Davidoglou.)

La propriété énoncée par M. Davidoglou n'est qu'un cas très particulier du théorème suivant et de sa réciproque:

Si d'un point on mène des droites aux trois sommets d'un triangle et trois autres droites formant avec ces premières trois couples en involution, ces trois droites iront rencontrer les côtés opposés du triangle en trois points situés en ligne droite. (Chasles, Géom. sup., page 247.)

Le 2º a été rédigé par méprise; la propriété qu'il signale n'est en effet que la répétition de celle qui est énoncée dans le premier.

Nota. - M. Bernès en nous faisant la même observation ajoute:

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées normales d'un point P, pris dans le plan d'un triangle ABC; les perpendiculaires élevées en P, aux droites PA, PB, PC rencontrent les côtés correspondants en trois points situés sur une droite p. L'équation de p est

$$\sum \frac{x}{x_1 y_1 \cos B + z_1 x_1 \cos C - x_1^2 \cos A + y_1 z_1} = o.$$

En désignant par 2, 2', 2" respectivement, les angles (PB, PC), (PC, PA), (PA, PB), l'équation de p est

$$\frac{x}{x_1} \operatorname{tg} \varphi + \frac{y}{y_1} \operatorname{tg} \varphi' + \frac{z}{z_1} \operatorname{tg} \varphi'' = 0,$$

qu'on peut écrire aussi

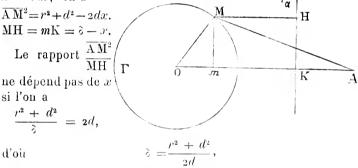
$$\sum \frac{a. PA.x}{\cos \varphi} = o.$$

QUESTION 632

Solution par M. H. LEUILLIER, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

On considére une circonférence Γ et un point Λ . Démontrer que, à ce point Λ , correspond une droite α telle que le rapport $\frac{\overline{M} \Lambda^2}{\overline{M} H}$ reste constant; \overline{M} désignant un point quelconque de Γ , $\overline{M}H$ étant la distance de \overline{M} à la droite α . (G. L.)

Appelons d, è les distances de O au point A et à la droite α qui, par raison de symétrie, est perpendiculaire à OA. Soit x = Om: on a



distance que l'on construira facilement.

Nota. - Solutions diverses par MM. Droz-Farry et Davidoglou.

QUESTION 633

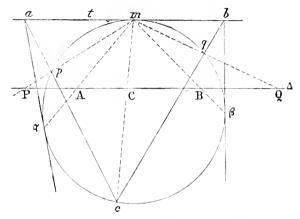
Solution par M. A. Droz-Farny.

On donne une circonference de cerele, la langentr en m a cette courbe et deux points a et b sur cette droite. Les droites qui joignent un point quelconque c de la circonférence aux points a et b rencontrent de nouveau la circonférence en p et q: démontrer que les droites mp, mq interceptent sur une paral-

léle à la tangente donnée, un segment qui est de grandeur constante, quelle que soit la position de c sur la circonférence.

(Mannheim.)

Menons de a et de b les secondes tangentes $a\alpha$ et $b\beta$ à la circonférence. Les droites mp, $m\alpha$, mc, mp, mq, rencontrent Δ respectivement en P, A, C, B, Q. D'après un théorème bien connu, les points m, p, et c forment un



groupe harmonique sur la circonférence. Le faisceau m(apzc) est donc harmonique et comme Δ est parallèle à ma, il en résulte que AP=AC; de même BC=BQ et par conséquent PQ=zAB. = constant.

Remarque. — La circonférence peut évidemment être remplacée par une conique quelconque.

Nota. - Autre solution par M. Davidoglou.

QUESTION 635 Solution par M. Davidoglou.

Soient A', B', C' les points de rencontre de la droite Δ qui passe par les deux points de Brocard d'un triangle. ABC avec les côtés de ce même triangle; désignons par α, β, γ les distances algébriques des points A', B', C' au premier point de Brocard et par p_a, p_b, p_c

les distances algébriques des sommets du triangle Δ . On a la relation

$$\frac{a^2}{b^2} \left[\frac{1}{\alpha \cdot p_a} - \frac{1}{\beta \cdot p_b} \right] + \frac{b^2}{c^2} \left[\frac{1}{\beta \cdot p_b} - \frac{1}{\gamma \cdot p_c} \right] + \frac{c^2}{a^2} \left[\frac{1}{\gamma \cdot p_c} - \frac{1}{\alpha \cdot p_a} \right] = o.$$
(Louis Bénézech.)

Abaissons $\omega \omega_a$, $\omega' \omega'_a$ perpendiculaires sur BC. On a

$$\frac{\alpha}{\alpha + \omega \omega'} = \frac{\omega \omega_a}{\omega' \omega_a'} = \frac{c^2}{b^2},$$

ďoù

$$\alpha = \frac{c^2}{b^2 - c^2} \cdot \omega \, \omega'.$$

De même

$$\beta = \frac{a^2}{c^2 - a^2} \cdot \omega \omega'; \qquad \gamma = \frac{b^2}{a^2 - b^2} \cdot \omega \omega'.$$

$$\frac{A'B + B\omega_a}{A'B + B\omega_a'} = \frac{\omega \omega_a}{\omega' \omega_a'} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Mais $B\omega_a = B\omega \cos \omega = \frac{c \sin \omega \cos \omega}{\sin B} = R\frac{c}{b} \cdot \sin 2\omega;$

$$B\omega_a' = a - c\omega_a' = a - \frac{b \sin \omega \cos \omega}{\sin c}$$

$$= a - 2R \cdot \frac{b}{c} \sin \omega \cos \omega = a - \frac{R \cdot b}{c} \sin 2\omega.$$

(1) devient
$$A'B = \frac{c}{b^2 - c^2} [ac - 2R.b \sin 2\omega];$$

alors
$$\frac{p_c}{p_b} = \frac{\text{A'B} + a}{\text{A'B}} = \frac{b(ab - 2\text{R}c\sin 2\omega)}{c(ac - 2\text{R}b\sin 2\omega)},$$

et de même

$$\frac{p_c}{p_a} = \frac{a(ab - 2\operatorname{Re}\sin 2\omega)}{c(bc - 2\operatorname{Ra}\sin 2\omega)}.$$

La relation donnée devient alors, après quelques simplifications:

(2)
$$\sin 2\omega \left[a^6 \left(b^4 - c^4\right) + \dot{b}^6 \left(c^4 - a^4\right) + c^6 \left(a^4 - b^4\right)\right]$$

= $2S \cdot \left[a^6 \left(b^2 - c^2\right) + b^6 \left(c^2 - a^2\right) + c^6 \left(a^2 - b^2\right)\right].$

Or, on sait que

$$\cos \omega = \frac{\Sigma a^2}{4S}$$
:

cette égalité donne

$$\sin 2\omega = 2S.\frac{\sum a^2}{\sum a^2 b^2},$$

et (2) se réduit facilement à une identité.

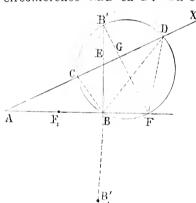
QUESTION 636

Solution par M. DAVIDOGLOU

On donne deux points fixes A et B. 1º Déterminer sur une droite AX, menée par A, deux points C, D tels que BC × BD ait une valeur donnée m² et qu'en même temps AB soit la bissectrice extérieure de l'angle CBD; 2º Quel est le tieu des points C et D lorsque AX tourne autour de A?

Mêmes questions en supposant que AB soit la bissectrice intérieure de l'angle CBD. (Bernès.)

1º La bissectrice intérieure de CBD coupe AX en E et la circonférence CBD en B'. On sait que BE.BB' = BC.BD;



done $BB' = \frac{m^2}{BE}$, et le point B' est connu. Si le cercle BCD coupe AB en F, on a:

$$\frac{BF}{BB'} = \frac{BE}{AB},$$

ou BF =
$$\frac{m^2}{AB}$$
.

La circonférence BB'F coupe AX aux points

cherchés C, D. Pour que ces deux points existent, il faut que le cercle BBF coupe AX; ou, qu'en désignant par R le rayon du cercle BCD, on ait

$$(1) FG < 2B.$$

Or,

$$FG = AF \sin \Lambda = \left(AB + \frac{m^2}{AB}\right) \sin A; \ \ 2R = \frac{BF}{\sin A} = \frac{m^2}{AB \sin A}.$$

1) s'écrit
$$m^2 > \overline{AB}^2 \cdot tg^2 A$$
.

Le symétrique B_1' de B', par rapport à AB, et le symétrique F_1 de F par rapport à B, donnent le cercle $B_1'F_1B$,

qui coupe AX aux points C_i et D_i , correspondant au cas de la bissectrice intérieure.

2º Les triangles BDF et ADF étant évidemment semblables:

$$\overline{\rm DF}^2 = \overline{\rm F}c^2 = {\rm AF.BF} = \frac{m^2}{{\rm AB}} \left[{\rm AB} \, + \frac{m^2}{{\rm AB}} \right] \cdot$$

Le lieu des points C et D est une circonférence de centre F et de rayon $R' = \frac{m}{AB} \sqrt{m^2 + AB^2}$.

De même pour C₁ et D₁, etc.

Nota. — Autre solution par M. Droz-Farny.

QUESTIONS 637 ET 639

Solutions, par M. DAVIDOGLOU.

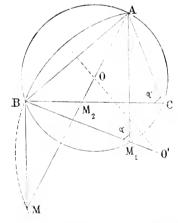
637. — On donne un angle A, et, sur l'un des côtés, un point fixe B. Lieu de M tel que le rayon qui passe par B dans le cercle ABM fasse un angle donné α avec l'isogonale AX de AM relativement à l'angle A.

Cas où z est droit.

(Bernès.)

639. — Dans l'angle A d'un triangle ABC on trace deux isogonales variables dont l'une rencontre en M₁ la circonférence ABC. Trouver le lieu du point M où l'autre droite est rencontrée par la circonférence qui, passant par A et B, a son centre sur BM₁. (Bernès.)

Ces deux problèmes sont au fond identiques.



Si, sur AB, nous décrivons un segment de cercle capable de l'augle α , ce segment coupe l'autre côté de l'angle A en C et C', on a ainsi le problème 639. Soient O et O' les centres des cercles ABC et ABM, puis M_2 le point où AM

coupe BC. On a:

$$\widehat{\mathrm{BMA}} = \widehat{\mathrm{BO'O}} = 90^{\circ} - [\widehat{\mathrm{A} + \mathrm{B}} - \widehat{\mathrm{BAM}}_{1}] = \widehat{\mathrm{BAM}}_{1} + \widehat{\mathrm{C}} - 90^{\circ};$$

d'autre part : $\widehat{BM_2M} = 180^{\circ} - \widehat{BAM}$.

Donc $\widehat{BMA} + \widehat{BM_0M} = 90$.

et le lieu de M est la perpendiculaire en B à BC.

Autrement (*). — La droite BM coupe la perpendiculaire élevée sur BA en son point milieu D en ω, centre de la circonférence qui passe par A et B, et qui coupe l'isogonale

AM' de AM en P; on a:

$$AM = C,$$

 $\omega BA = C + \alpha$

donc

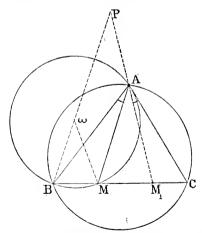
angle
$$B\omega D = BPA = 90 - (C + \alpha)$$
,

et comme angle M'AB = $A - \alpha$,

on obtient: angle PBA = A + C - 90 - B; etc...

QUESTION 638 Solution par M. Davidoglou.

Dans l'angle A d'un triangle ABC on trace deux droites isogonales variables dont l'une rencontre BC en M; trouver le iieu



du point P où l'autre droite est rencontrée par le rayon Βω du cercle ABM.

(Bernès.)

AP coupe BC en M₁; on a:

$$\widehat{AM_1B} = \widehat{C} + \widehat{BAM};$$

$$\widehat{PBC} = 90^{\circ} - \frac{\widehat{B\omega M}}{2}$$

$$= 90^{\circ} - \widehat{BAM}.$$

Par suite:

$$\widehat{BPA} = 90^{\circ} - C.$$

Le lieu de P est donc un cercle décrit sur BA

comme corde et capable d'un angle = 90° - C.

^(*) Cette solution de la question 639 est de M. Droz-Farny.

QUESTIONS PROPOSÉES

683. — Les points remarquables du plan d'un triangle qui se construisent avec le plus de simplicité sont: le centre du cercle circonscrit qui n'exige que 12 opérations élémentaires, le centre de gravité et l'orthocentre qui en exigent 16. Montrer qu'on peut construire le point de Nagel, dont les coortes par le point de la point de la point les coortes qu'on peut construire le point de la point les coortes qu'en peut construire le point de la point les coortes qu'en peut construire le point de la plan d'un triangle qui se construire de point de la plan d'un triangle qui se construire de plus de simplicité sont: le centre du cercle circonscrit qui n'existe de la plan d'un triangle qui se construire de plus de simplicité sont: le centre du cercle circonscrit qui n'existe que 12 opérations élémentaires, le centre du cercle circonscrit qui n'existe que 12 opérations élémentaires, le centre du plus de simplicité sont: le centre du cercle circonscrit qui n'existe que 12 opérations élémentaires, le centre de gravité et l'orthocentre qui en exigent 16. Montre qu'en peut construire le point de Nagel, dont les coortes qu'en plus de la pl

données normales sont : $\frac{p-a}{a}$, $\frac{p-b}{b}$, $\frac{p-c}{c}$ et le point M

qui a pour coordonnées normales : $\frac{2a-p}{a}$, $\frac{2b-p}{b}$, $\frac{2c-p}{c}$,

l'un et l'autre aussi avec 16 opérations élémentaires, et qu'il en est de même des transformés continus de ces deux points.

La démonstration peut se déduire presque immédiatement de la valeur donnée des coordonnées. (E. Lemoine.)

684. — Si
$$\alpha = 10^{\circ}$$
, on a cotg α cotg 3α cotg 5α cotg $7\alpha = 1g 2\alpha tg 4\alpha tg 6\alpha tg 8\alpha$. (Georges-F. d'Avillez.)

685. — Dans un triangle, on donne : 1º la direction d'un des côtés; 2º deux des points remarquables de la droite d'Euler.

On propose de construire ce triangle.

N. B. — Les points remarquables qu'il faut considérer sont: Le point O, centre du centre circonscrit; H, l'orthocentre; le centre ω du cercle des neuf points; G, le centre de gravité. (Georges-F. d'Avillez.)

686. — Les perpendiculaires élevées en α , β , γ sur les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$, l'orthique de ABC, interceptent sur les côtés BC, CA, AB des segments x, y, z, tels que

$$\frac{a-x}{a+x} + \frac{b-y}{b+y} + \frac{c-z}{c+z} = 1.$$
(Davidoglou.)

687. — Si, dans un triangle, le triple d'un côté égale la somme des deux autres, le cercle inscrit est tangent au cercle

inscrit dans le triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle donné. (Davidoglou.)

688. - Démontrer, que si l'on a :

(1)
$$tg^2\alpha \cdot \cot \beta = 1.$$

$$tg(\beta - \alpha) = \frac{a}{b},$$

(3)
$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha - 45^{\circ})}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{a}{c},$$

on a aussi
$$\frac{a^2 + (b - c)^2}{a^2 - (b - c)^2} = \frac{c}{2(b - c)}.$$

(Davidoglou.)

689. - On donne une sphère, une de ses cordes et un point arbitraire o sur cette corde. Par ab, on mène un plan quelconque qui coupe la sphère suivant le petit cercle C.

Démontrer qu'on peut inscrire dans C une infinité de triangles qui soient en même temps circonscrits à un cercle de centre o. Si l, m, n, sont les côtés d'un de ces triangles,

faire voir que $\frac{1}{lm} + \frac{1}{ln} + \frac{1}{mn}$ est constant, quel que soit le triangle et quel que soit le plan mené par ab.

(Mannheim.)

RECTIFICATIONS

1º La question 675 est identique à la question 634; la solution paraîtra

dans le nº prochain;

2º M. Tzitzéica nous fait observer, avec raison, que la question 568 a été résolue a la page 46 et à la page 202, et que c'est, par oubli de la première solution, que j'ai publié la seconde.

> Le Directeur-gérant. G. DE LONGCHAMPS.

SUR LE CLASSEMENT DES RACINES

APPARTENANT A DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Par M. Elgé.

Dans le numéro d'octobre dernier du Bulletin de Mathématiques élémentaires (*), M. Vitasse a présenté une méthode dont la rigueur ne laisse rien à désirer et qui permet de classer les racines, supposées réelles, de deux équations données, du second degré. Il est possible, pensons-nous, de simplifier quelque peu l'exposition théorique et surtout les règles pratiques.

Prenons les équations sous la forme

$$x^{2} + px + q = 0,$$

 $X^{2} + p'X + q' = 0.$

On peut observer que si l'on effectue une transfermation en posant

$$x = u + h,$$

$$X = U + h,$$

les nouvelles racines seront classées dans le même ordre que les anciennes et nous pouvons résoudre le problème proposé sur les équations

$$u^{2} + (2h + p)u + h^{2} + p\dot{h} + q = 0,$$

$$U^{2} + (2h + p')U + h^{2} + p'\dot{h} + q' = 0.$$

Nous disposerons de la quantité arbitraire h de façon que

$$ph + q = p'h + q',$$

et en supposant $p \neq p'(**)$, nous avons

$$h = \frac{q - q'}{p' - p}.$$

^(*) Ce journal, publié sous la direction de M. Niewenglowski, vient de se fonder à la Société d'éditions scientifiques. Le numéro auquel il est fait, ici, allusion est le nº 2; on trouvera l'article cité à la page 21.

^(**) Si p=p', les racines portées sur une droite, à partir d'une origine O, forment, sur cette droite, une division isotomique. Les deux racines de l'une des équations données renferment les deux racines de l'autre. On distingue celle des équations qui joue le premier rôle au moyen du signe des quantités q, q', q-q'. La discussion n'a aucune difficulté.

Les équations que nous avons à considérer sont

(1)
$$u^2 + Pu + Q = 0,$$

(2)
$$U^2 + P'U + Q = 0;$$

en posant

$$P = 2h + p,$$

 $P' = 2h + p',$
 $Q = h^2 + ph + q.$

Soient α , β les racines de (1); α' , β' celles de (2). En observant que

$$\alpha\beta = \alpha'\beta',$$

on voit qu'il suffit de ranger les deux plus grandes racines de la suite α , β , α' , β' et les racines majeures (comme on peut les appeler pour la commodité du langage, dans cette discussion) ne peuvent pas appartenir à la même équation; cette remarque est une conséquence de l'égalité (3). Nous désignerons ces racines par α , α' ; β , β' s'appelleront les racines mineures.

Si O est négatif, les relations

$$\alpha + P + \frac{Q}{\alpha} = 0,$$

$$\alpha' + P' + \frac{Q}{\alpha'} = 0,$$

donnent

$$(\alpha - \alpha') \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{Q}}{\alpha \alpha'} \right) = \mathbf{P}' - \mathbf{P}.$$

D'ailleurs, les équations proposées ayant une racine positive, l'autre racine étant négative, les majeures α , α' sont des quantités positives; ainsi, dans notre hypothèse Q < 0, le second facteur du premier membre est positif. Le signe de $\alpha - \alpha'$ est donc le mème que celui de P' - P; et comme P' - P = p' - p, on voit finalement que le signe des quantités Q et p' - p détermine le classement des quatre racines.

Si Q est positif, les identités

$$\begin{split} \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 &- \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta, \\ \left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)^2 &- \left(\frac{\alpha'-\beta'}{2}\right)^2 = \alpha'\beta', \end{split}$$

donnent, puisque $\alpha\beta = \alpha'\beta'$,

$$\frac{P^2 - P'^2}{4} = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha' - \beta'}{2}\right)^2.$$

Ainsi, $\alpha - \beta$ sera plus grand, ou plus petit que $\alpha' - \beta'$, suivant le signe de $P^2 - P^2$, c'est-à-dire suivant le signe de (p - p')(4h + p + p').

Si nous prenons, sur une droite, les longueurs:

 $\overrightarrow{OA} = \alpha$, $\overrightarrow{OB} = \beta$, $\overrightarrow{OA'} = \alpha'$, $\overrightarrow{OB'} = \beta'$;

comme OA.OB = OA'.OB', les points A', B' sont tous les deux sur le segment AB, ou tous les deux à l'extérieur. Il faut distinguer les deux cas; et, à cet effet, voir si AB est plus grand ou plus petit que A'B'. C'est ce qu'indiquera le signe de (4).

QUELQUES PROPRIÉTÉS

DU CERCLE CONJUGUÉ A UN TRIANGLE

Par M. S. Chassiotis (*).

(Snite et sin, voir page 218.)

2. — Soient f, f' f'' les trois autres foyers des trois hyperboles qui correspondent, d'après le théorème VI, à un triangle donné ABC. Si nous remarquons que f, f', f'' sont les symétriques du point de concours des hauteurs H par rapport aux milieux $\alpha\beta\gamma$ des trois côtés, nous voyons que le cercle ff'f'' est homothétique au cercle des neuf points du triangle ABC par rapport au point H, + 2 étant la puissance d'homothétie, par suite, les cercles ABC et ff'f'' coïncident; nous aurons ainsi le théorème suivant:

Théorème IX. — Les foyers f, f', f' des hyperboles (H), (H'), (H"), qui correspondent à un triangle ABC (d'après le théorème IV), sont sur le cercle circonscrit au triangle.

Il est facile de déduire de là que:

Le lieu des foyers des hyperboles correspondant à tous les triangles inscrits dans un cercle donné et ayant un orthocentre H fixe est la circonférence O.

^(*) Dans l'énoncé du théorème VI une erreur à été commise. D'après le théorème VI les asymptotes étant les tangentes menées par les milieux des côtés au cercle conjugué, il est évident que ces tangentes ne sont pas rectangulaires, en général par conséquent les hyperboles correspondantes au triangle ne sont pas équilatères.

Remarque IV. — Les points de contact des hyperboles avec les côtés sont à l'intersection des côtés avec les parallèles qui leur sont menées par le point de concours de hauteurs. Pour démontrer cette propriété, il suffit de chercher les pôles des tangentes aux points A, B, C, aux circonférences décrites sur les côtés comme diamètre, par rapport au cercle conjugué au triangle ABC. Comme ces dernières circonférences passent par les pieds des hauteurs, il est évident que les hyperboles (H), (H'), (H'') seront tangentes aux parallèles, aux côtés du triangle menées par les sommets.

On établira sans peine le théorème suivant :

Théorème X. — Les points de contact des côtés du triangle ABC et de leurs parallèles menées par les sommets forment trois parallèlogrammes dont les centres sont les milieux des côtés du triangle.

3. — Soit ABC un triangle B'C', C'A', A'B' les parallèles aux côtés menées par A, B, C. Le point O du concours des hauteurs du triangle ABC est le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'. Alors en appliquant les théorèmes VI-X on verra que:

4° Etant donné un triangle A'B'C', il existe trois hyperboles ayant un foyer commun au centre du cercle circonscrit au triangle et tangentes à deux côtés du triangle et à deux de leurs parallèles passant par les milieux A, B, C, des côtés.

2º Les foyers f, f', f' non communs se trouvent sur le cercle de neuf points du triangle A'B'C', etc.

Théorème I. — Le cercle conjugué à un triangle ABC coupe les hyperboles correspondant à ABC à angle droit; il en est de même pour le cercle circonscrit au triangle formé par les parallèles aux côtés du triangle menées par les sommets.

En effet, soient (H), (H'), (H'') les hyperboles correspondant à ABC, ils ont un foyer commun qui est le centre du cercle conjugué, c'est-à-dire le centre des hauteurs. Or, un cercle pouvant être regardé comme ayant deux foyers confondues dans son centre, il en résulte que le cercle conjugué est une conique homofocale avec les hyperboles (H), (H'), (H''). On en conclut le théorème.

Démonstration analogue pour le cercle circonscrit.

Signalons enfin comme dernière propriété celle que l'on obtient en prenant la polaire réciproque du cercle de neuf points par rapport au cercle conjugué.

Théorème II. — Les directrices des hyperboles (H), (H'). (H'') correspondant à un triangle donné ABC et les parallèles B'C C'A', A'B' aux côtés du triangle menées par les sommets sont tangentes à une même conique C ayant un foyer au centre du cercle conjugué.

Cette conique est la transformée par polaire réciproque, du cercle de neuf points par rapport au cercle conjugué.

Théorème III. — De plus elle est tangente à quatre coniques circonscrites au triangle ABC et ayant un foyer commun au centre des hauteurs. Car le cercle de neuf points d'un triangle est tangent un cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits à ce triangle.

CORRESPONDANCE

Voici la lettre que mon ami M. Lemoine m'a adressée, en réponse au compte rendu que j'ai donné, dans le dernier numéro, du Traité d'Arithmétique qu'il vient de faire paraître en collaboration avec notre ami commun M. Laisant; lettre que j'ai annoncée dans le numéro cité. Je la public en respectant l'orthographe nouvelle: je désire pourtant déclarer que la réforme en question ne me semble ni logique, ni suffisamment radicale. Mais les lecteurs pourront se faire une opinion, dans un sens ou dans l'autre, d'après le spécimen, iei publié.

Mon cher ami.

Je vous remercie, en mon nom et au nom de notre ami Laisant, mon colaborateur, du compte rendu aimable que vous avez fait de notre petit Traité d'aritmetique, mais nous voulons de plus vous expliquer notre pensée sur le point qui vous a inspiré quelques légères réserves et engagé à prendre la défense du corps enseignant, en vous disant que nous ne l'attaquons en aucune façon, ni directement, ni entre les lignes.

Il ne s'agit nulement du talent ou de la compétence de vos collègues, nous la conaissons et nous l'aprécions; il s'agit de contribuer à faire renoucer définitivement, du haut en bas de l'échèle, à l'emploi séculaire d'un moule, que vous jugez incorect aussi bien que nous, et duquel sont tirés quelques principes primordiaus et quelques définitions; les moules séculaires sont très solides; cète afirmation est une La Paliçade.

Que beaucoup de professeurs distingués, comme le sont la plupart des professeurs de l'Université, n'en soient plus à ces errements, nous le savons, mais les ouvrages récents, au courant des derniers perfectionements didactiques come l'aritmétique de M. Andoyer, que vous citez, n'empêchent pas qu'il y en ait beaucoup trop encore qui ne méritent pas le même compliment.

La définition que nous proposons pour le nombre, qui est une chose abstraite, est abstraite, c'est vrai, mais si simplement! Ne serait-ce pas là une qualité qui peut avoir l'avantage d'habituer l'esprit dès le début, au terrain des abstractions, qu'il aborde ainsi par un chemin très facile; nous ne répondrons pas, d'ailleurs, autrement à cète observation, car c'est à l'expérience de décider, en dernier ressort si cète définition, rigoureuse et compde, présente des dificultés réèles de conception pour les jeunes intelligences, dificultés qui doivent la faire rejeter malgré ses avantages absolus.

Quant à la réforme de l'ortografie. j'y ai pris une part spécialement active dans la préparation de notre petit livre et c'est pour en dire quelques mots, que je me suis décidé à vous écrire cète lettre avec l'assentiment de Laisant, qui aprouve d'ailleurs complètement ma manière de voir.

Tout le monde est d'accord pour reconaître que notre ortografie a des anomalies singulières, qu'èle est remplie de chinoiseries ridicules, lesquèles, pour être très concrètes, n'en font pas moins perdre à l'enfance de longues heures qui seraient mieus employées à tout autre chose. Ce sont seulement les irrégularités choquantes. les exceptions fautives, les plus grosses verrues enfin de notre bèle langue écrite, qu'il s'agit de faire disparaître; l'avantage est évident et le misonéisme me semble seul pouvoir susciter des objections; mais

la rendre complètement logique, par simple fonétisme, par exemple, si la chose était possible — ce que je ne crois pas, à cause surtout de la variété des prononciations — ce serait un crime puisque la langue en serait défigurée, heureusement : est modus in rebus.

En fait, la question de la réforme est à l'ordre du jour un peu partout, il y a même plusieurs sistèmes proposés; cette multiplicité, dans l'espèce, n'est ni un défaut, ni un inconvénient; chaque home instruit adoptera le sistème de réforme qui lui conviendra le mieus; il y aura alors pendant dix, pendant vingt ans peut-ètre, une anarchie ortografique féconde, come au xviº siècle, d'où sortira un usage que l'Académie sanctionera; c'est le seul rôle de l'Académie, èle n'a point à prendre l'initiative des réformes, èle ne l'a jamais fait et avec raison; c'est vous, c'est nous tous, qui faisons la langue ortografique, ce n'est point èle; nous décidons et èlle codifie quand l'heure est venue.

Parmi les divers sistèmes de réforme, nous en avons choisi un que nous trouvons logique, modéré dans ses propositions et nous avons oficièlement passé, avec notre aritmétique, des régions de la discussion spéculative à cèles de la pratique, voilà tout. Quand il sait l'ortografie classique, il ne faut pas deus heures d'atension à un home, habitué à la réflexion, pour transformer de cète façon sa manière d'ortografier certains mots.

Mais nous voilà bien loin du champ de la Matématique, aussi je termine court en vous serrant cordialement la main.

Extrait d'une lettre de M. Aubry.

... A propos de la formule

$$\frac{\mathrm{H}}{6}\left(\mathrm{B}+4\mathrm{B'}+\mathrm{B''}\right),\,$$

appelée omniformule dans un des volumes de votre journal (*) et, ailleurs, formule de Sarrus, règle des trois niveaux, permettezmoi de rappeler que j'ai donné, dans le dernier article que je

^(*) Journal, 1886, p. 79.

vous ai envoyé (Hist. de la géom. de la mesure), une démonstration de cette célèbre formule en l'appelant formule de Torricelli, m'appuyant sur certains auteurs italiens, entre autres, Peri et Bellachi (I principi della geometria moderna, Pistoia, 1873). Je crois, en effet, me rappeler en avoir vu quelque chose dans les Ex. géom. (1647) de Torricelli. L'Interm. des Math. vient de poser la question de l'origine de cette formule. Si je me suis trompé, je vous prierais de rectifier l'endroit en question, sachant que vous avez à cœur d'établir autant que possible les droits des inventeurs. Ne possédant plus les œuvres de Torricelli, n'ayant pu encore les retrouver et ne voyant pas quand je pourrai rechercher moi-même à Paris si mes souvenirs sont exacts, je suis forcé d'attendre la réponse qu'on fera dans l'Intermédiaire à la question posée.

Si cette formule n'est pas de Torricelli, elle est sùrement de Marc-Laurin (.1 Treatise of Fluxion). Voici, en effet, ce qu'il dit dans son introduction:

Considérons un solide formé par une section conique qui tourne autour de son axe; la portion d'un tel solide terminée par deux plans parallèles et le cylindre, de même hauteur que cette portion, ayant une base égale à la section moyenne, diffèrent toujours l'un de l'autre de la même quantité, pour une même inclinaison des plans sécants sur l'axe et une même hauteur.

Je ne m'explique pas comment M. Maleyx (N. A., 1880) a trouvé la formule de Torricelli dans le mème ouvrage de MacLaurin: car, comme l'a remarqué M. Rey (J. E., 1886, p. 171),

la formule $\frac{A+4B}{6}$ R ... n'est qu'une formule d'approxima-

tion générale qui n'est même pas de Mac-Laurin, mais qui avait été donné auparavant par Côtes (Harm. mens.), Stirling (De summatione ser.) et Newton (Meth. diff.).

La formule me paraît donc devoir être attribuée à Torricelli, ou à Mac-Lauriu tout au moins, pour le cas où la section est une fonction du deuxième degré par rapport à la hauteur de la section. Il resterait à découvrir qui a vu d'abord qu'elle avait lieu également, quand la section est une fonction du troisième degré: c'est ce que je ne puis établir avec certitude; ce point est d'ailleurs de moindre importance.

EXERCICES DIVERS

Par M. Aug. Boutin.

414. — Si n est une somme de deux triangulaires, 4n + 1 est une somme de deux carrés, et réciproquement.

En effet $n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2}$ entraı̂ne $+n + 1 = (x+y+1)^2 + (x-y)^2,$ et réciproquement.

415. — Les notations étant celles employées dans notre Note sur les centres isodynamiques et les centres isogones (J. M. E., Année 1889, p. 99), et en outre, F désignant le milieu de GH, P' le symétrique de P_1 par rapport à V_2 , V' le symétrique de V par rapport à V_2 , K'_1 le point d'intersection de GW, HW₂; e l'intersection de GW et FP₂, i l'intersection de GV et FW, démontrer que les coordonnées normales de ces nouveaux points sont respectivement (à une constante prés) :

- (\mathbf{V}') $x = 0 \cos B \cos C - \sin B \sin C + \sqrt{3} \sin A$ $= 4 \cos B \cos C + \sin (A - 30^\circ),$ (P') $x = \sin A + 2\sqrt{3} \cos B \cos C$, $x = 3 \cos (B - C) + 2 \sin B \sin C - \sqrt{3} \sin A$ (i) $= 4 \sin B \sin C - \sqrt{3} \sin (A + 60^{\circ})$ $x = \cos B \cos C + \sin (A - 30^\circ),$ (K') $x = 2 \sin A - \sqrt{3} \cos A$ (e) (l_2) $x = 2 \cos B \cos C + \sin (A - 30^\circ)$. En outre: V' est à l'intersection des droites HW2, FW, P' à l'intersection des droites O9W, FP2, HK, i est situé sur O₉V₀,
- K' est situé sur FP₂, P₁ est situé sur OK',

KK' est parallèle à la droite d'Euler OGH,

l₂ est à l'intersection des droites O₉W, HW₂, FL', OV₂,

 L_2l_2 est parallèle à OGH.

Les groupes des quatre points suivants constituent une division harmonique:

$$\begin{split} & \text{VL}_2\text{KW}, \text{ VKL}_2^{'}\text{W}. \text{ FV}_2\text{KW}_2, \text{ V}_2i\text{L}'\text{P}_2, \\ & \text{O}_9i\text{P}_2\text{V}_2, \text{ } Gi\text{W}_2\text{V}, \text{ } Fi\text{WV'}, \text{ P}_2i\text{V}_2\text{L}_2^{'}, \\ & \text{O}_9\text{L}'\text{P}_2\text{L}_2^{'}, \text{ V}_2\text{GWK'}, \text{ } P'\text{FP}_2\text{K'}, \text{ } \text{LO}_9\text{L}_2\text{W}_2, \\ & \text{L}'_9e\text{WK}, \text{ KOWE}, \text{ W}_2\text{V}'l_2\text{K'}, \text{ } \text{II}l_2\text{L}'^2\text{W}_2. \end{split}$$

Tontes ces propriétés se déduisent aisément de considérations géomériques élémentaires.

416. — Distances de points remarquables dans le triangle.

(Les notations sont celles de notre note $J.\ M.\ E.$, année 1892, p. 248, et celles de l'exercice précédent.

$$\begin{split} VL_2 &= \frac{2R}{\sqrt{3} \cot \theta + 1} \sqrt{\frac{\cot \theta - \sqrt{3}}{\cot \theta + \sqrt{3}}}, \\ WL_2 &= \frac{4R}{\sqrt{3} \cot \theta + 1} \sqrt{\frac{\cot \theta + \sqrt{3}}{\cot \theta + \sqrt{3}}}, \\ VL_2' &= \frac{4R}{\sqrt{3} \cot \theta - 1} \sqrt{\frac{\cot \theta + \sqrt{3}}{\cot \theta + \sqrt{3}}}, \\ WL_2' &= \frac{2R}{\sqrt{3} \cot \theta - 1} \sqrt{\frac{\cot \theta + \sqrt{3}}{\cot \theta + \sqrt{3}}}, \\ WL_2' &= \frac{2R}{\sqrt{3} \cot \theta - 1} \sqrt{\frac{\cot \theta + \sqrt{3}}{\cot \theta + \sqrt{3}}}, \\ WL_2' &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - \cot \theta + 2\sqrt{3})}{\lg \frac{\varphi}{(\sqrt{3} + \cot \theta)}}, \\ \overline{\PiW}^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - \cot \theta + 2\sqrt{3})}{\lg \frac{\varphi}{(\cot \theta + 2\sqrt{3})}}, \\ \overline{KK'}^2 &= \frac{S(\lg \frac{1}{\varphi} \cot \theta + 2\sqrt{3})}{\lg \frac{\varphi}{(\cot \theta + 2\sqrt{3})}}, \\ \overline{WL}^2 &= \frac{S(\lg \frac{1}{\varphi} \cot \theta + 2\sqrt{3})}{\lg \frac{\varphi}{(\cot \theta + 1)}(4\sqrt{3} \lg \frac{1}{\varphi} + 3 \lg \frac{1}{\varphi} \cot \theta + 1)}, \\ \overline{UL}^2 &= R^2 - \frac{S(\sqrt{3} \cot \theta + 1)(4\sqrt{3} \lg \frac{1}{\varphi} + 3 \lg \frac{1}{\varphi} \cot \theta + 1)}{\lg \frac{1}{\varphi}(5 + \sqrt{3} \cot \theta)^2}, \\ \overline{HV}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)}{3\lg \frac{1}{\varphi}(\sqrt{3} + \cot \theta)}, \\ \overline{HW}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)}{3\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})}, \\ \overline{HL}^2 &= \frac{6S(\cot \theta - \sqrt{3})(2\sqrt{3} + \lg \frac{1}{\varphi} - \cot \theta)}{\lg \frac{1}{\varphi}(5 + \sqrt{3} \cot \theta)^2}, \\ \overline{HL}^2 &= \frac{6S(\cot \theta + \sqrt{3})(\lg \frac{1}{\varphi} - \cot \theta) - 2\sqrt{3}}{\lg \frac{1}{\varphi}(1 + \sqrt{3} \cot \theta)^2}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(1 + \sqrt{3} \cot \theta)^2}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(1 + \sqrt{3} \cot \theta)^2}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})(\cot \theta + \sqrt{3})}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})(\cot \theta + \sqrt{3})}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})(\cot \theta + \sqrt{3})}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})(\cot \theta + \sqrt{3})}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})(\cot \theta + \sqrt{3})}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})(\cot \theta + \sqrt{3})}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})(\cot \theta + \sqrt{3})}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})(\cot \theta + \sqrt{3})}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})(\cot \theta + \sqrt{3})}, \\ \overline{HL}_2^2 &= \frac{2S(\lg \frac{1}{\varphi} - 3 \cot \theta)(\cot \theta + \sqrt{3})}{\lg \frac{1}{\varphi}(\cot \theta + \sqrt{3})(\cot \theta + \sqrt{3})},$$

$$\begin{split} W_{2}\overline{U_{2}^{'2}} &= \frac{88 \left(\lg \varphi - 3 \cot \theta \theta \right)}{3 \lg \varphi \left(\cot \theta \theta - \sqrt{3} \right) \left(\sqrt{3} \cot \theta \theta - 1 \right)^{2}}, \\ \overline{O_{9}V^{2}} &= \frac{R^{2} \lg \varphi \left(\cot \theta \theta - 3 \sqrt{3} \right) + 48 \left(\lg \varphi - \sqrt{3} \right)}{-4 \lg \theta \left(\cot \theta \theta + \sqrt{3} \right)}, \\ O_{9}\overline{W^{2}} &= \frac{R^{2} \lg \varphi \left(\cot \theta \theta + 3\sqrt{3} \right) + 48 \left(\lg \varphi + \sqrt{3} \right)}{4 \lg \varphi \left(\cot \theta \theta - \sqrt{3} \right)}, \\ \overline{VL^{2}} &= \frac{88 \left(\lg \varphi - \cot \theta \theta - 2\sqrt{3} \right)}{\lg \varphi \left(\cot \theta \theta + \sqrt{3} \right) \left(5 + \sqrt{3} \cot \theta \theta \right)^{2}}, \\ \overline{WU'^{2}} &= \frac{88 \left(\lg \varphi - \cot \theta \theta + 2\sqrt{3} \right)}{\lg \varphi \left(\cot \theta \theta - \sqrt{3} \right) \left(5 - \sqrt{3} \cot \theta \theta \right)^{2}}, \\ \overline{FK^{2}} &= \frac{8 \left(\lg \varphi \cot \theta \theta - 9 \right) \left(\cot \theta \theta + 2\sqrt{3} \right)}{18 \lg \varphi \cot \theta^{2} \theta}, \\ \overline{FV_{2}^{2}} &= \frac{8 \left(\lg \varphi \cot \theta - 9 \right) \left(\cot \theta \theta - \sqrt{3} \right)}{18 \lg \varphi \left(\cot \theta \theta + \sqrt{3} \right)}, \\ \overline{FW_{2}^{2}} &= \frac{8 \left(\lg \varphi \cot \theta - 9 \right) \left(\cot \theta \theta + \sqrt{3} \right)}{18 \lg \varphi \left(\cot \theta \theta - \sqrt{3} \right)}, \\ \overline{GZ} &= \frac{1}{2} FK \qquad O_{9}Z &= \frac{1}{2} HK, \\ \overline{HP_{1}^{2}} &= \frac{8}{6 \lg \varphi} \left[\frac{8 \lg \varphi}{\cot \theta \theta + \sqrt{3}} + \frac{9 - \lg \varphi \cot \theta \theta}{\left(\cot \theta \theta - \sqrt{3} \right)^{2}} - 12 \right], \\ \overline{HP_{2}^{2}} &= \frac{8}{6 \lg \varphi} \left[\frac{8 \lg \varphi}{\cot \theta \theta - \sqrt{3}} + \frac{9 - \lg \varphi \cot \theta \theta}{\left(\cot \theta \theta - \sqrt{3} \right)^{2}} - 12 \right]. \end{split}$$

Distance A du point O au point

$$\frac{\alpha}{b+c} = \frac{\beta}{a+c} = \frac{\gamma}{a+b},$$

$$4 \Delta^2 = (2R + r)^2 + 2r^2 - p^2.$$

Distance des isobariques de I' =

$$\Delta^{2} = \frac{r^{2}}{(p-a)^{2}} \left[\delta_{a}^{2} - 3 (p-a)^{2} \right],$$

$$\overline{DV}^{2} = \overline{D}^{2} \left[a \sin^{2}\theta + \sin^{2}\theta + a \cos^{2}\theta \right],$$

 $\overline{\mathrm{HD}}^{\prime\,2} = \mathrm{R}^2 \left(4 \sin^4 \theta + \sin^2 \theta + 4 \right) - 2 \mathrm{S} \cot \theta.$

Distance des brocardiens du point de Gergonne:

$$\Delta^2 = \frac{4r^2}{p^2} \, (\partial^2 - 3p^2).$$

On peut remarquer que cette distance est le double de la distance des isobariques de 1, ou le double de 1Γ .

Distance des brocardiens de Γ_a' :

$$\Delta^2 = \frac{4^{p^2}}{(p-a)^2} \left[\delta_a^2 - 3 (p-a)^2 \right].$$

Cette formule et les deux précédentes ont été données par M. E. Lemoine (A. F. Congrès de Pau, 1892).

BACCALAURÉATS

(OCTOBRE 1895)

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE MODERNE (LETTRES-SCIENCES).

Problème obligatoire: Deux forces données F, F' sont respectivement parallèles à la base et à la longueur d'un plan incliné dont l'inclinaison i est inconnue. Elles sollicitent alternativement un point matériel pesant, posé sur le plan. On demande quel doit être le poids p de ce point matériel pour qu'il reste en repos dans les deux cas, et quelle est l'inclinaison du plan, cette dernière étant exprimée au moyen de la tangente.

— Condition de possibilité du problème; — Quel doit être le rapport des deux forces F et F' pour que i soit égal à 45° ?

Trois questions à choisir: 1º Définir la dérivée d'une fonction d'une variable et montrer que la fonction continue $y = ax^2 + bx + c$ a une dérivée pour toute valeur de x; trouver par suite cette dérivée.

2° Étudier la variation de la fonction $y=rac{ax+b}{a'x+b'}$ et construire la courbe représentative.

3º Montrer que l'équation du premier degré Ax + By + C = 0. représente dans tous les cas une droite dont les coordonnées des différents points sont les valeurs simultanées de x et y.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE (LETTRES-MATHÉMATIQUES).

I. — Problème obligatoire :

On considère un trapèze isocèle ABCD et ses diagonales ASD et BSC, ainsi que la perpendiculaire OO' abaissée, du point S, sur les deux côtés opposés parallèles. Quand on fait tourner la figure autour de OO', le trapèze ABCD engendre un tronc de cône et les triangles ASB, CSD, engendrent deux cônes.

On demande de déterminer AB et CD, connaissant la hauteur OO', le volume du tronc de cône ABCD et la somme des volumes des deux

cônes ABS et CDS.

II. — Trois questions à choisir :

le Géométrie descriptive. Angle de deux plans.

2º Géométrie descriptive. Distance d'un point à un plan. 3º Géométrie descriptive. Distance d'un point à une droite.

QUESTIONS 634 ET 675 (*) Solution par M. A. Droz-Farny.

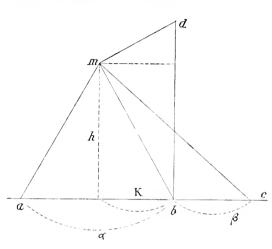
On donne les trois points a, b, c sur une droite. Quel est le lieu d'un point m, tel que

$$\frac{1}{tg \text{ bma}} + \frac{1}{tg \text{ cmb}} = constante.$$
 (Mannheim.)

^(*) Comme nous l'avons observé (p. 264), les deux questions 634, 675 sont identiques.

La relation proposée peut s'écrire $\cot b ma + \cot c mb = \text{constante}$.

Représentons par a et 3 les distances ab et bc, par r la droite bm, par h la perpendiculaire abaissée de m sur abc et par K la distance de son pied à b. La relation proposée se transforme successivement en



$$\begin{split} \frac{1-\frac{K}{h}\cdot\frac{z-K}{h}}{\frac{K}{h}+\frac{\alpha-K}{h}} + \frac{1+\frac{\beta+K}{h}\cdot\frac{K}{h}}{\frac{\beta+K}{h}-\frac{K}{h}} &= \text{const.} = M, \\ \frac{(z+\beta)\left(h^2+K^2\right)}{\alpha\beta h} &= M, \qquad \frac{r^2}{h} = \frac{\alpha\beta M}{\alpha+\beta} &= \text{constante,} \end{split}$$

Élevons en m une perpendiculaire qui rencontre en d la perpendiculaire élevée en b sur ac; on a évidemment

$$r^2 = h \cdot (bd),$$
 $\frac{r^2}{h} = \widehat{bd} = \text{constante}.$

d'où

Le lieu cherché est donc la circonférence décrite sur bd comme diamètre.

Nota. — Autre solution par M. Davidoglov, qui rattache la question 634 à la précédente.

QUESTION 640

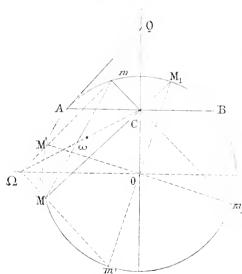
Solution par M. L'HUILLIER, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

Par le milieu C d'une corde fixe AB et d'un ceccle O, on trace, de part et d'autre, de CA deux rayons CM, Cm également inclinés sur CA.

1º Démontrer que la corde Mm passe par un point fixe Q et que les cercles QCM, QCm sont orthogonaux au cercle O. 2º Lieu du centre du cercle CMm. (Bernès.)

1° CQ étant la bissectrice extérieure de l'angle $\mathbf{MC}m$, on a

Les cercles QCM, QCm sont orthogonaux au cercle O puisque



 $00.00 = r^2$. 2° Menons en met M les droites $m\Omega$, $M\Omega$, respectivement perpendiculaires à Cm, CM. Le centre ω du cercle circonscrità CMm est le point milieu de CΩ. La perpendiculaire à Cm passe par le point M', diamétralement opposé au point m, second point de rencontre de Cm avec la

circonférence. Ce point est évidemment symétrique de M par, apport au diamètre parallèle à AB. De même, la perpendi-

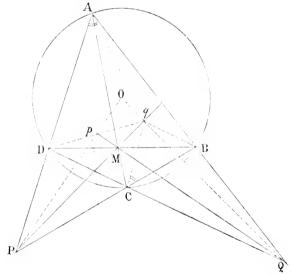
culaire à CM passe par le point m', symétrique de m par rapport au même diamètre. Le lieu de Ω est donc ce diamètre lui-même et le lieu de ω la perpendiculaire élevée au milieu de CO.

Nota. - Autres solutions par MM. Droz-Farny et DavidogLou.

QUESTION 641 Solution par M. A. Droz-Farry.

Dans un quadrilatère ABCD, AC, BD se coupent en M, AD, BC en P, AB, CD en Q. 1º Montrer qu'il y a sur chaque côté du triangle MPQ, sur MP, par exemple, un point q, et un seul, tel que ce côté soit bissectrice intérieure ou extérieure de chacun des angles AqB, CqD sous lesquels, de q, on voit les côtés qui passent par Q. 2º Dans le cas où ABCD est inscriptible, faire voir que les quadrilatères APMq, BCMq, BDPq, CAPq sont aussi inscriptibles et que qA.qB = qC.qD = qM.qP. (Bernès.)

Quelle que soit la position du point q sur MP, les faisceaux



 $q(\mathrm{DPCQ})$ et $q(\mathrm{APBQ})$ sont harmoniques. Si donc $\mathrm{P}q$ doit être la bissectrice intérieure ou extérieure des angles $\mathrm{A}q\mathrm{B}$ et

tibles.

CqD, il faut nécessairement que l'angle PqQ soit droit; q est donc dans le triangle polaire MPQ, le pied de la hauteur abaissée du sommet Q sur la base MP. Comme MP est la polaire du point Q, on sait que cette hauteur passe par le centre O de la circonférence circonscrite à ABCD. Si donc le quadrilatère AECD est inscriptible, il en est de même de OpMq; donc

$$PM.Pq = Pp.PO = PO(PO - OP) = \overline{PO}^2 - PO.Op = \overline{PO}^2 - \overline{R}^2$$

Or $\overline{PO^2} - \overline{R}^2$ exprime la puissance de P par rapport à la circonférence. Donc

$$PM.Pq = PA.PD = PC.PB;$$

les quadrilatères ADMq et BCMq sont donc inscriptibles : Angle PDB = AqM = BqP,

donc BDPq et pour la même raison CAPq sont aussi inscrip-

On a: angle
$$CqA = CqB$$
; angle $qAD = DMP = qMB = qCB$.

Les triangles AqD et BqC sont donc semblables, d'où:

$$\frac{Aq}{Cq} = \frac{Dq}{Bq}$$
: $qA.qB = qC.qD$

De même les triangles qDP et qMC sont semblables: en effet, angle DqP = MqC; en outre, angle MCQ = MBq = DPq;

donc
$$\frac{qP}{qC} = \frac{qD}{qM}$$
, d'où $qC.qD = qP.qM$.

Remarque. — La deuxième partie pourrait être démontrée a l'aide de la question 518, dont elle est la réciproque.

Nota. - Autre solution par M. Davidoglou.

OUESTION 647

Solution et développements par M. A. Droz-Farny.

Les médiatrices de AC, AB dans le triangle ABC rencontrent en β , γ la médiane AD. Démontrez que $C\beta$, $B\gamma$ se coupent en M sur la symédiane et que AM est perpendiculaire sur OM, O étant le centre de la circonférence ABC. (Bernès.)

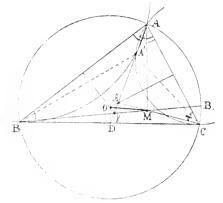
Les deux circonférences tangentes en B et C au côté BC qui passent par A se coupent en un point A', situé évidemment sur la médiane AD, car l'axe radical de ces cir-

conférences doit diviser en parties égales leur tangente commune. Il en résulte:

$$\widehat{A'CB} = \widehat{DAC}$$
, et $\widehat{A'BC} = \widehat{DAB}$.

Les triangles C3A et BγA étant isoscèles, on a aussi:

$$\widehat{AC\beta} = \widehat{DAC}$$
 et $\widehat{AB\gamma} = \widehat{DAB}$.



Les droites CA' et C\$\beta\$ sont isogonales dans l'angle C et les droites BA' et B\$\beta\$ sont isogonales dans l'angle B\$; par conséquent, C\$\beta\$ et B\$\beta\$ doivent se croiser sur l'isogonale de AD, c'est-à-dire sur la symédiane issue de A.

Il en résulte

$$\widehat{AMC} + \widehat{MAC} = \widehat{DAC} + \widehat{DAB} = A$$
,
 $\widehat{AMC} = \widehat{AMB} = 180 - A$,
 $\widehat{BMG} = \widehat{BOG} = 2A$.

done

et.

done

Les points B.O, M, C sont sur une même circonférence. On en dédnit que

$$\widehat{OMG} = OBG = 90 - A,$$

 $\widehat{CMR}' = A,$
 $\widehat{OMA} = 90^{\circ}.$

On peut aussi faire les remarques suivantes:

1º M est un des sommets du second triangle de Brocard.

2º On a $\widehat{MAB} = \widehat{MCA}$. $\widehat{MAC} = \widehat{MBA}$, les circonférences CMA et BMA sont donc tangentes en A, respectivement, à AB et AC.

Ainsi M est le point double des figures semblables construites sur les côtés AC et AB. 3º MO passe par le centre du cercle d'Apollonius correspondant au côté BC.

1º Le triangle podaire de M est inversement semblable à ABC.

Nota. — Autre solution par M. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

QUESTION 648

Solution et développements par M. Droz-Farny.

H étant l'orthocentre du triangle ABC, S le point diamétralement opposé à A sur le cercle ABC, \$, γ les points où BH, CH rencontrent AS, démontrer que le point où se coupent les cercles AB\$, ACγ est la projection de H sur la médiane AD.

(Bernès.)

Le diamètre AO étant l'isogonale de AH, on a :

angle OAB = HAC = 90° - C angle ABH = 90° - A donc HBC = OAB et, par conséquent, la circonférence AB3 est tangente en B au côté BC; c'est un des cercles adjoints du triang'e. De même, la circonférence AB7 est tangente en C à BC. Leur axe radical doit donc diviser la tangente commune BC en deux parties égales; la droite AA'D est la médiane, issue de A.

Angle
$$AA'B = A\beta B = 180 - B$$
, angle $AA'C = A\gamma C = 180 - C$.

Done, angle BA'C = 180 - A = BHC; les quatre points B,A',H,C sont sur une même circonférence.

Ainsi, angle HA'C = HBC = 90 - C et angle CA'D = C; donc angle $HA'D = HA'C + CA'D = 90^{\circ}$.

Le point A' jouit de nombreuses propriétés; en voic quelques-unes:

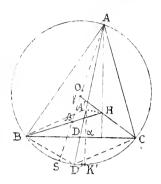
1º La médiane AA'D coupe le cercle ABC en D'. La figure A'BD' Cest un parallélogramme, car

angle CA'D' = BD'A

donc BD' parallèle CA'.

2º La perpendiculaire A'a sur BC coupe en K'la circonférence

ABC; A' appartenant à la circonférence BHC, il en résulte que $A'\alpha = \alpha K'$; mais on a aussi A'D = DD'; donc D'K' est parallèle à BC et par conséquent AK' est l'isogonale de AD, donc la symédiane issue de A. Le point A' est donc le symétrique, par rapport à BC, du point où la symédiane KA coupela circonférence circonscrite.



3º A' appartient au cercle ortho-centroïdal.

4º Le triangle BA'D' étant semblable à ABC, on a BA': A'D' = c:a; de même, CA': A'D' = b:a donc: BA': CA' = c:b.

Le point A' appartient au cercle d'Apollonius correspondant au côté BC.

 \mathbb{S}^{o} Le triangle podaire de A' est isoscèle. Son angle de base = A.

Il y aurait encore lieu de considérer le triangle A'B'C' inscrit dans le cercle orthocentroïdal et qui est semblable au triangle médian. On obtiendrait aisément de nouvelles propriétés de ces points.

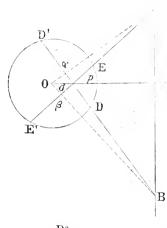
Nota. — Autre solution par MM. L'Huillien, répôtiteur au lycée de Bar-le-Duc; Tzitzeica.

QUESTION 652

Solution par M. A. Droz-Farny.

On donne une circonférence de cercle et un point dans son intérieur De ce point, on mêne deux droites conjuguées par rapport au cercle. Démontrer que, quelles que soient ces deux droites, la somme des inverses des carrés des cordes que le cercle intercepte sur elles est constante. (Mannheim.)

Soient DD' et EE' deux cordes conjuguées passant par le



point P, A et B leurs pôles respectifs situés sur la polaire de P. Le triangle APB a O pour orthocentre, et soient α , β , γ les pieds des hauteurs et OP = d.

On a: $\gamma A. \gamma B = O\gamma [O\gamma - d]$ $= \overline{O\gamma^2} - R^2$ $\overline{DD_1}^2 = 4[R^2 - \overline{O\alpha^2}]$ $= 4[R^2 - \frac{R^4}{\overline{OA^2}}]$ $= 4R^2 \frac{\overline{OA^2} - R^2}{\overline{OA^2}}$

$$=\frac{4R^2}{OA^2}[\overline{O\gamma^2}+\overline{\gamma A}^2-R^2]=\frac{4R^2}{\overline{OA}^2}[\gamma A.\gamma B+\overline{\gamma A}^2]=\frac{4\overline{R^2}.\gamma A.AB}{\overline{OA}^2}.$$
 De même
$$\overline{EE_1}^2=\frac{4R^2.\gamma B.AB}{\overline{OB}^2}$$

$$\begin{split} \frac{1}{|DD_1|^2} + \frac{1}{|EE_1|^2} &= \frac{\overline{OA}^2 \cdot \gamma B + \overline{OB}^2 \cdot \gamma A}{4R^2 \cdot \gamma A \cdot \gamma B \cdot AB} = \frac{[\overline{O\gamma}^2 + \gamma \overline{A}^2] \gamma B + [\overline{O\gamma}^2 + \gamma \overline{B}^2] \gamma A}{4\overline{R}^2 (\overline{O\gamma}^2 - R^2) AB} \\ &= \frac{\overline{O\gamma}^2 \cdot AB + (\overline{O\gamma}^2 - \overline{R}^2) AB}{4R^2 (\overline{O\gamma}^2 - R^2) AB} = \frac{4R^2 (\overline{O\gamma}^2 - \overline{R}^2)}{2\overline{O\gamma}^2 - R^2} \end{split} .$$

En posant enfin $O_{\gamma} = \frac{R^2}{d}$, on trouve

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{DD_1}}^2} + \frac{1}{\overline{\mathrm{EE_1}}^2} = \frac{2\,\mathrm{R}^2 - d^2}{4(\mathrm{R}^4 - d^2\mathrm{R}^2)} = \mathrm{constante}.$$

QUESTION 655 Solution par M. H. L'HULLIER.

On considère un triangle ABC et le cercle Δ circonscrit à ABC. Les parallèles à la tangente en A au cercle Δ menées par les points B et C rencontrent les côtés AC et AB en des points A'A" La droite A'A" coupe BC en z. Démontrer que Az et les droites analogues B3, C7 passent par un même point. (G. L.)

D'après un théorème bien connu la droite Az passe par les

milieux P, Q de A'C et BA". Ces droites étant antiparallèles avec BC par rapport à l'angle A, la droite Az est symédiane du triangle ABC, donc... etc.

$$\frac{Cz}{\alpha B} = \frac{BA'}{A''C};$$

mais les deux triangles semblables ABC, ABA' donnent:

$$(1) \qquad \frac{BA'}{BC} = \frac{AB}{AC}$$

de même, on a:

(2)
$$\frac{A''C}{BC} = \frac{AC}{AB}.$$

Divisant (1) et (2) membre à membre, on a :

$$\frac{B'A}{A''C} \quad \text{ou} \quad \frac{Cz}{\alpha B} \equiv \frac{\overline{A}\overline{B}^2}{A'C^2},$$

e'est-à-dire que Az passe par le point de Lemoine (**). N. B. — Solutions diverses par MM. Droz-Farry, Govens, Tzitzéica.

QUESTION 657 Solution par M. A. Droz-Farry.

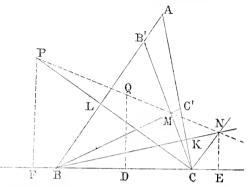
Le point M où se coupent les deux droites symétriques de BC, l'une relativement à la hauteur BK du triangle ABC, l'autre relativement à la hauteur CL et les points N et P où ces mêmes hauteurs rencontrent respectivement la parallèle menée par C à AB et la parallèle menée par B à AC, sont trois points en ligne droite. De plus, si Q est la rencontre de cette droite MNP et de

^(*) Cette solution est de M. LEMOINE

^(**) En indiquant cette propriété, j'avais eu pour objet principal une construction du point de Lemoine. Y en a-t-il de plus simple au point de vue géométrographique?

la médiatrice de BC, les deux angles QBC, QCB sont égaux à l'angle A du triangle. (Bernès.)

Portons sur CA et BA respectivement CK = KC' et BL = LB';



les droites BC' et CL' sont les symétriques demandées coupant en M. Il en résulte que faisceau B (C, K, C'P) = - 1

= C(BLB'N)= C(BNB'L).Ces deux fais-

ceaux ayant le rayon BC, commun, les points de rencontre P, M, N des couples de rayons homologues sont en ligne droite. Soient E et F les projections de N et P sur AC; on a

$$CE = CN \cos B = \frac{CK \cos B}{\cos A} = \frac{a \cos B \cos C}{\cos A} = BF; E \text{ et } F$$

sont donc isotomiques sur BC; on trouve de mème

$$NE = \frac{a \sin B \cos C}{\cos A} \quad \text{et} \quad PF = \frac{a \cos B \sin C}{\cos A}$$

donc QD =
$$a \frac{(\sin B \cos C + \cos B \sin C)}{2 \cos A} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} A$$
,

ce qui prouve que QBC = QCB = A.

Remarque. - Si BQ et CQ coupent respectivement CA et BA en B et y les circonférences ABB et ACy sont les cercles adjoints du triangle, tangents en B et C à BC.

Nota. - Autre solution par M. L'Huillier.

QUESTIONS PROPOSÉES

690. - Étant donné un triangle ABC, on inscrit dans l'angle A les deux cercles qui sont tangents à la fois aux côtés de l'angle et au cercle inscrit du triangle ABC; on inscrit de même les deux cercles qui sont tangents à la fois aux côtés de l'angle et au cercle inscrit dans l'angle A. En agissant ainsi pour les angles B et C, on trace douze cercles dont le produit des rayons est égal à la quatrième puissance du produit du rayon du cercle inscrit multiplié par l'aire du triangle ABC.

(E.-N. Barisien.)

691. — Par le point I, centre du cercle inscrit dans un triangle ABC, on mène une droite parallèle à BC qui rencontre AC en B' et AB en C'; par le même point I, on mène une parallèle à AC qui rencontre BC en A' et AB en C', puis une parallèle a AB qui rencontre BC en A' et AC en B''.

1º Démontrer les relations

$$\frac{IA'.1A''}{BC} = \frac{IB'.IB''}{AC} = \frac{IC'.1C''}{AB},$$

$$IA.IB'.IC' = A'A''.B'B''.C'C'.$$

2º Évaluer l'aire du triangle formé par les droites AB', A"C' et B"C". Dans quel cas cette aire est-elle égale à celle du triangle ABC?

3º On considère le cercle de rayon r_1 tangent en B'' et C'' aux côtés AC et AB, le cercle de rayon r_2 tangent en C' et A'' aux côtés AB et BC, et le cercle de rayon r_3 tangent en A' et B' aux côtés BC et AC.

Démontrer la relation

$$\frac{r_1 r_2 r_3}{r_3} = \frac{2 R^2}{p^2}$$

R, r et p désignant, respectivement, les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit, et le demi-périmètre.

Nota. — D'après la question nº 4658 de M. Mannheim (N.A.M., janvier 1894), parmi les cercles tangents aux trois cercles r_1, r_2, r_3 , se trouverait le cercle des neuf points du triangle ABC.

(E.-N. Barisien).

692. - Éliminer , entre les deux équations

$$x = \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi},$$
$$y = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi}.$$

(G, L.).

693. — On considère une parabole P, de sommet O. On fait tourner, dans son plan, autour de O, d'un angle droit, la parabole P; soit Q sa nouvelle position.

Les deux paraboles P, Q ont un seul point réel commun A; sur OA, comme diamètre, on décrit une circonférence Δ .

Par un point M, arbitrairement choisi sur Δ , on mène des parallèles aux axes des paraboles P, Q; elles les rencontrent respectivement aux points p, q.

Démontrer que le triangle pMq est isoscèle. (G. L.)

- 694. Plaçant le pôle d'une transformation par rayons vecteurs réciproques au sommet c d'un triangle donné abc, on prend les transformés a', b' des sommets a, b. Démontrer que le transformé du centre o du cercle inscrit au triangle abc est, sur la droite co, le centre du cercle ex-inscrit au triangle a'cb'.

 (Mannheim.)
- 695. Étant donné un angle A, on considère une circenférence, ayant pour centre un point O de la bissectrice AR de l'angle et coupant les côtés de l'angle et les tangentes à la circonférence en deux points d'intersection B et E, situés sur l'oblique BE à la bissectrice et de côtés différents de cette droite. le Quels que soient la position du centre O sur la bissectrice et le rayon de la circonférence sécante, l'angle M des deux tangentes considérées est égal à l'angle A. 2º Le lieu du point d'intersection M des tangentes est la perpendiculaire, en A, à la bissectrice AR. (E. Lebon.)
- 696. Trouver toutes les solutions entières des deux équations indéterminées

$$x^2 + 2y = u^2$$

 $x^2 - 2y = v^2$

dans lesquelles x, y, u, v sont des inconnues.

(E. Lemoine.)

Le Directeur-gérant, G. DE LONGCHAMPS.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

	Pages.		Pages.
Arithmétique et Algèb	re.	triangle et du tétraèdre,	178
Questions d'enseignement		par M. E. Braud	145
(sur la division des nom-		Sur un théorème indépen-	
bres entiers; sur la con-		dant du Postulatum d'Eu-	169
version des fractions		clide, par M. G. Tarry	103
ordinaires en décimales,		Note sur le pentagone régu- lier, par M. A. Droz-Farny	193
par Mmo Vo F. Prime 3 et	25	Détermination du centre de	100
Sur les caractères de divi-		similitude de deux figures	
sibilité, par M. M. Fouché		directement semblables,	
30,	57	par F , J ,	495
Propriétés du carré magique		Démonstration d'une rela-	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •
de 3, par M. G. Tarry	55	tion connue, par un Ano-	
Sur le classement des racines		nyme	198
appartenant à deux équa-		Quelques proprietés da	
tions du second degre, par	1/151	cercle conjugué à un	
M. $Elg\dot{e}$	265	triangle, par M. S. Chas-	
G éométrie.		siotis 218,	267
Problème du billard circu-		Sur le volume d'un segment	
laire par M. G. Tarry .	36	de sphère, par M. E. Lebon	241
Note sur la question 549, par		Note de géométrie, par	
M. Dhavernas	37	M. Droz-Farny	242
Questions d'enseignement		Trigonométrie	
(sur la théorie des projec-		Sur la somme des m'emes	
tions), par M ^{me} V ^e F. Prime	49	puissances des cosinus	
A propos de la question 562,		d'arcs en progression	
par M. Mannheim.	68	arithmétique, par	
Rectification approchée du		M. F. X. Y.	5
cercle, par M. M. d'Ocagne	77	Démonstration de l'inegalité	
Application de la Géomètrie		$x - \sin x < \frac{x^3}{4} \text{ par M. } M.$	
analytique à la résolution		$x = \sin x < \frac{1}{4} \text{ par m. m.}$	
des équations, par $M.EN.$	ں۔	Fouché	54
Barisien	78	Questions d'enseignement,	
Sur le déplacement des		par Mme Ve F. Prime	73
figures semblables, par	79	Notice historique sur la Tri-	
M. G. Tarry Le théorème de Feuerbach.	1.7	gonométrie, par M. Aubry	
par M. L. Vautrė	83	104, 127, 154,	173
Propriétés du triangle, par	(,,,	Démonstration de la formule	
M. JS. Mackay.	97	$_{\mathrm{tot}}$ $\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{\mathrm{B}}$	
M. JS. Mackay Propriétés de trois figures		$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\lg \frac{A+B}{2}}{\lg \frac{A-B}{2}}, \text{ par}$	
égales, par M. G. Tarry .	100	$\overline{a-b} = A - B$, par	
Sur les axes de rotation, par		tg ——	
$M. G. Tarry \dots$	101	$M. E. Brand \dots$	453
Sur la rectification appro-		Démonstration géométrique	
chée de la circonférence,		de quelques formules de	
par M. Mannheim	103	trigonométrie, par M. E.	
La $(n + 1)^e$ démonstration		Brand	170
du théorème de Pythagore,		Sur l'équation trigonomé-	
par M. G. Tarry	104	$trique a \sin x + b \cos x = c,$	
La transformation de Bosco-	40.	par M. Droz-Farny	217
vich, par M. Langley	121	Baccalauréats.	
Sur la rectification appro-			
chée de la circonférence,	125	Besançon, Bordeaux, Caen, Clermont, Dijon	
par M. Ant. Pleskot	120	Grenoble, Lille, Lyon, Mont-	
Simples remarques sur les	l	pellier	39

		,	
V D :: D	Pages.		'ages.
Nancy, Poitiers, Rennes,		Extrait d'une lettre de M. Au-	
Toulouse	66	bry (sur l'omniformule).	271
Toulouse			211
Rennes, Toulouse, Paris.	86	Bibliographie.	
Paris (avril 1895)	109	Tableau métrique des loga-	
Paris (avril 1893) Aix, Alger, Besançon, Bor-		rithmes par M. E. Dumesnil	
deaux, Caen, Clermont,		(compte rendu par G. L.)	14
Diion	131	Llements de trigonométrie.	
Dijon	165	nar MM (h Vacquant ot	
Paris (inillet 4895) Ivan	100	Macé de Lépinay (compte rendu par G. L.)	
Paris (juillet 1895), Lyon,	100	rendu par G, L	45
Montpellier	180	Géométrie générale, par	10
Nancy, Poitiers	200	M. Garcia de Galdeano.	10
Rennes, Toulouse	223	Théoria des quantités ima-	16
Aix, Alger, Besançon, Bor-		Théorie des quantités imagi-	
deaux	254	Marres, par A. Lasata y	
Paris (octobre 1895)	280	naires, par A. Lasala y	16
		deometrie descriptive élé-	
Concours divers.		mentaire, par le Dr Ortu	
Concours d'agrégation		Carboni	16
en 1894. Solution par		Cours de géométrie descrip-	
M Drog Egymu	8	tive, par M. Ch. Brisse	16
M. Droz-Farny	0	Le journal L'Etranger	16
Ecole spéciale militaire		L'Annuaire du Bureau des	10
(Concours de 1895), solu-	4440	longitudes	16
_ tion par M. Harivel	-159	Eléments de géométrie, par	10
Ecole navale (Concours		M. Ch. Bisshe	00
de 1895), énoncés	163	M. Ch. Bioche.	88
Institut national agrono-		Leçons de cosmographie, par	
mique (Concours de 1895),		MM. Tisserand et Andoyer	
énonces	161	(compte rendu par $G.L$)	251
		Traité d'arithmétique, par	
		The distribution of the	
Mélanges et Corres-		MM. Laisant et Lemoine	
Mélanges et Corres-		MM. Laisant et Lemoine	252
pondance.		MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires	252
pondance.		MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires	252
pondance. Exercices divers, par M. A.	-	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de	252
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,168,	-	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par	252
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,168, 129, 157, 178, 198, 222,	-	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu	252
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 245.	270	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.)	252
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 120, 157, 178, 198, 222, 243, Extrait d'une lettre de	-	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par	252
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63, 84,108, 120, 157, 178, 198, 222, 243, Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la	-	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu	252
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 120, 137, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule	-	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.)	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 120, 137, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule	-	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 120, 137, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule	270	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.)	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 120, 137, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule	-	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées G00 à 696. Questions résolues	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 120, 137, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule	270	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées G00 à 696. Questions résolues	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 120, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \dots$	270	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées G00 à 696. Questions résolues	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,168, 129, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}.$ Nécrologie (sur le Père Fran-	270	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées G00 à 696. Questions résolues	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A.	270	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées G00 à 696. Questions résolues	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 245. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre	270	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées G00 à 696. Questions résolues	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 245. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre Extrait d'une lettre de M. G.	270	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées G00 à 696. Questions résolues	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, $\frac{222}{245}$. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}.$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre	270 61 68	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 539, 563, 556, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588,	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}.$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre	270	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 559, 563, 556, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588, 590, 593, 598, 602, 603.	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}.$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre	270 61 68	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 559, 563, 556, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588, 590, 593, 598, 602, 603.	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre	270 61 68	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçon's complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 539, 563, 536, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588, 590, 593, 598, 602, 603, 604, 605, 283, 568, 604, 605, 606, 607, 608, 609	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre	270 61 68	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçon's complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 539, 563, 536, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588, 590, 593, 598, 602, 603, 604, 605, 283, 568, 604, 605, 606, 607, 608, 609	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre	270 61 68	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçon's complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 539, 563, 556, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588, 590, 593, 598, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616(p. 247) 617, 619.	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre	270 61 68	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçon's complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 539, 563, 556, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588, 590, 593, 598, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616(p. 247) 617, 619.	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre	270 61 68 217	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 559, 563, 556, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588, 590, 593, 598, 602, 603, 604, 605, 283, 568, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616(p.247)617, 619, 620, 618, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628,	
$\begin{array}{c} \textbf{pondance.} \\ \textbf{Exercices divers, par M. A.} \\ \textit{Boutin, 12,38,63,84,108,} \\ 129, 157, 178, 198, 222, 243. \\ \textbf{Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule} \\ \frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \\ \textbf{Nécrologie (sur le Père Francisco d Enza), par M. A.} \\ \textit{Marre } \\ \textbf{Extrait d'une lettre de M. G.} \\ \textit{Tarry (solution de la question 646) } \\ \textbf{Extrait d'une lettre de M. Bernès (sur la formule M. Bernès (sur la formule b-c b+c) } \\ \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}, \operatorname{etc.}) \\ \end{array}$	270 61 68 217	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 559, 563, 556, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588, 590, 593, 598, 602, 603, 604, 605, 283, 568, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616(p.247)617, 619, 620, 618, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628,	
$\begin{array}{c} \textbf{pondance.} \\ \textbf{Exercices divers, par M. A.} \\ \textit{Boutin, 12,38,63,84,108,} \\ 129, 157, 178, 198, 222, 243. \\ \textbf{Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule} \\ \frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \\ \textbf{Nécrologie (sur le Père Francisco d Enza), par M. A.} \\ \textit{Marre } \\ \textbf{Extrait d'une lettre de M. G.} \\ \textit{Tarry (solution de la question 646) } \\ \textbf{Extrait d'une lettre de M. Bernès (sur la formule M. Bernès (sur la formule b-c b+c) } \\ \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}, \operatorname{etc.}) \\ \end{array}$	270 61 68 217	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçon's complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 559, 563, 556, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588, 590, 593, 598, 602, 603, 604, 605, 283, 568, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616(p.247)617, 619, 620, 618, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 635, 636, 637, 638, 639, 634	
pondance. Exercices divers, par M. A. Boutin, 12,38,63,84,108, 129, 157, 178, 198, 222, 243. Extrait d'une lettre de M. Esquirol à propos de la formule $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}$ Nécrologie (sur le Père Francisco d'Enza), par M. A. Marre	270 61 68 217	MM. Laisant et Lemoine (Compte rendu par G. L.) Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, par M. Tournois (Compte rendu par G. L.) Manuel du baccalauréat, par M. Gerard (Compte rendu par G. L.) Questions proposées 600 à 696. Questions résolues. 515, 559, 563, 556, 562, 564, 570, 572, 571, 573, 575, 577, 578, 580, 407, 516, 579, 581, 582, 583, 584, 585, 257, 561, 574, 586, 601, 546, 587, 588, 590, 593, 598, 602, 603, 604, 605, 283, 568, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616(p.247)617, 619, 620, 618, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628,	

TABLE ALPHABÉTIOUE DES NOMS D'AUTEURS

ALETROP, 19, 68, 90, 93, 112.

Andover, maître de conferences à la Faculté des Sciences, 251, 252, 270. Anonyme, 198.

Aubry, 104, 126, 154, 173, 271.

AVILLEZ (G. D'), 263.

ATANASIO LASALA Y MARTINEZ, 16. Auric, ancien élève de l'école Polu-

technique, 36.

Barisien, ancien élève de l'école Polytechnique, 23, 44, 45, 47. 48, 69, 71, 78, 90, 91, 110, 118, 183, 184, 185, 187, 190, 201, 208, 205, 212, 232, 238, 239, 287. Bernès, professeur honoraire, 22,

41, 119, 120, 143, 144, 188, 490, 191, 192, 216, 249, 260, 261, 278, 279, 280, 282, 286. Bénézech (L.), 119, 259.

Bioche, ancien élève de l'école Normale supérieure, 88.

BOUQUET DE LA GRYE, membre de l'Institut, 16.

BOUTIN (A.), 12. 38, 63, 84, 108, 129, 157, 178, 198, 222, 245, 273 Bozal-Obejero, professeur à l'Insti-

tut de Bilbao, 135, 189, 203, 208. 228.

Brand (E.), 145, 153, 170.

Brisse (Ch.), professeur de mathématiques spéciales au lycée Condorcet, 16.

CAZAMIAN (A.), 191.

Champion (A.), 93, 95; 112, 113, 414, 418, 140, 183, 185, 186, 188, 189, 203, 204, 206, 208, 209, 211, 212, 214, 215, 225, 227, 230, 231.

Chassiotis (S.), 218, 267. Cyparissos Stephanos, 71.

DALY (G.), 203.

Davidoglou, élève au lycée Codreano, *a Berlad*, 20, 23, 41, 43, 45, 46, 47, 70, 89, 92, 93, 94, 95, 410, 112, 413, 414, 418, 117, 139, 167, 168, 182, 183, 185, 186, 188, 203, 204, 206, 208, 210, 211, 213, 215, 225, 227, 230, 231, 234, 235, 236, 238, 239, 240, 256, 257, 258, 261, 262, 263, 264, 277, 279, 280. Dellac (H.), professeur au lycée de Marseille, 21, 137.

Dhavernas, élève au lucée Michelet. 37, 93, 189, 204, 206, 208,

209, 215, 225.

Dorlet, 79.

Droz-Farny, professeur au lycée de Porrentruy, 8, 22, 23, 44, 45, 47, 69, 89, 93, 94, 95, 96, 112, 113, 115, 116, 140, 482, 483, 487, 227, 228, 230, 234, 236, 237, 242, 261, 262, 276, 256, 257, 279, 280, 282, 283, 285. Dumesnil, 14.

Elgé, 214, 265.

Esquirol, professeur au lycée de Montpellier, 64.

Foucart, élève au lycée Michelet, 23, 44, 116, 140.

Fouché (M.), professeur à Sainte-Barbe, 30, 54, 57.

F. J., 195.

F. x. y. 5.

GARCIA DE GALDEANO, professeur de Géométrie analytique à l'université de Saragosse, 16.

Gérard, Dr ès sciences, professeur au lycée de Lyon, 254.

Goyens, 93, 95, 111, 114, 228, 230, 236, 285.

Humbert, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, 201.

Janssen, membre de l'Institut, 16. José de Arbelaez, 166.

Laisant, D^r ès sciences, 282, 269. Langley, professeur de mathématiques à Bedford, 121.

Lauvernay, 95, 111, 112, 113.

Lebon (E.), professeur au lycée Charlemagne, 95, 215, 241, 288. Leconte, élève au collège Chaptal, 189, 203.

Lemoine (E.), ancien élève de l'école Polytechnique, 19, 94, 96, 114, 139, 228, 230, 240, 252, 253, 263, 269, 275, 285, 288.

Leroy (E.), commis des Ponts et Chaussees, 186, 187.

LEVY (L.). examinateur d'admission à l'école Polytechnique, 141.

L'HUILLIER, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc, 210, 213, 215, 224, 227, 228, 230, 231, 234, 236, 238, 257, 278, 282, 283, 284, 286.

Longchamps (G. de), 45, 46, 72 114, 118, 119, 168, 183, 202, 213, 216, 224, 230, 235, 236, 237, 257, 285, 287, 288. Mackay, professour à l'Académie

Mackay, professeur à l'Académie d'Edimbourg, 97, 121, 226, 232. Macé de Lépinay, professeur de mathématiques spéciales au lycée

Henri IV, 15.

Malvezin, 252.

Mannheim professeur à l'école Polytechnique, 24, 43, 47, 48, 68, 72, 92, 95, 96, 103, 119, 140, 144, 168, 194, 203, 204, 214, 215, 225, 227, 238, 258, 264, 276, 283, 287, 288.

Marre (A.), correspondant de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei,

68.

Negretzu (J.), élève à la Faculté de Bucharest, 46, 94, 95, 96, 113, 114, 140, 141, 183, 188, 189, 203, 204, 208, 228, 231.

Ocagne (M. d'), répétiteur à l'école Polytechnique, 77, 95, 425, 226. Orte Carboni (Dr S.), 46.

Pleskot (A), professeur à l'école réale tchèque de Prague, 125.

Poincaré, membre de l'Institut, 16.

POULAIN (A.), 82.

Prime (Ve F.), 3, 25, 49, 73, 92, 94, 95, 112, 116, 117, 482. Reboul (L'abbé), professeur au col-

lege de Belley. 159. Rodriguez (G.), étudiant, 112, 135,

166, 236.

Schoute, professeur à l'université de Groningue, 216.

Sollertinsky, 166, 201.

Spino (César), 186.

Tannery (J.), sous-directeur des études scientifiques à l'école Normale supérieure, 251.

Tarry (41.), 36, 55, 72, 79, 100, 101, 104, 169, 239, 247.

THIRY (C.), 210.

Times (DE), 135.

Tisserand, directeur de l'Observatoire, membre de l'Institut. 16, 256.

Tournois, professeur au lycée Lakanal. 253.

Tzitzeica, élève à l'école Normale de Bucharest, 23, 44, 45, 46, 47, 70, 71, 90, 95, 116, 183, 209, 210, 211, 264, 283, 285.

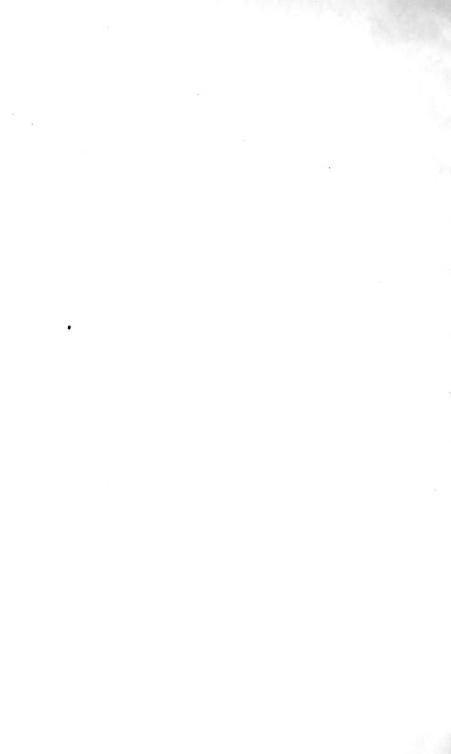
VACQUANT, Inspecteur général de

l'Université, 15.

Valtré, 47, 71, 83, 94, 189, 213. Vazot professeur au collège de Falaise, 23, 45, 46, 90, 92, 93, 95, 112, 413, 414, 483, 485, 188,

Verrière, 93. X. 215.









QA 1 J6836 sér.4 t.4E Journal de mathématiques élémentaires

Math.

PLEASE DO NOT REMOVE CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

IN BROS

